

東京大学工学部 4年生 夏学期

# 応用音響学 第1回 (4/5)

猿渡 洋

東京大学大学院情報理工学系研究科  
創造情報学/システム情報学専攻  
[hiroshi\\_saruwatari@ipc.i.u-tokyo.ac.jp](mailto:hiroshi_saruwatari@ipc.i.u-tokyo.ac.jp)

# 2019年度講義スケジュール

## 前半(猿渡担当)

- 4/05: 第1回
- 4/19: 第2回
- 4/26: 第3回
- 5/10: 第4回
- 5/17は休講予定
- 5/24: 第5回
- 5/31: 第6回

## 後半(小山先生担当)

- 6/07: 第7回
- 6/14: 第8回
- 6/21: 第9回
- 6/28: 第10回
- 7/05: 第11回
- 7/12は休講予定
- 7/26: 学期末試験(予定)

# 講義目的

## 【講義前半】(猿渡担当)

- 音声分析, 音声符号化, 音声認識, 音声合成, 音響信号処理などに関連する基礎知識について講義する。応用として, 携帯電話やMP3などの音声音楽情報圧縮技術や音声認識技術・音声合成システムなどがある。統計的信号処理の基礎, スペクトル解析, パターン認識, 確率モデル, 統計学習, 最適解探策などの基本概念とアルゴリズムを理解し, これらの技術の基礎になる知識と概念の習得を目指す。

## 【講義後半】(小山先生担当)

- 音響現象の数理的なモデリング方法を理解することを目的とし, 音波の伝播, 反射, 回折, 散乱などの現象を数学的に記述するための基礎事項について講義する。応用として, 音源位置の推定や音場の可視化, 音のVR/ARや騒音・振動制御, 音響数値シミュレーションなどがある。これらの基本概念を理解することで, 様々な波動場の計測・制御技術の基礎となる知識の習得を目指す。

# 講義前半の概要

## ■ 狙いと性格

- 「信号処理論第一、第二」に続く「信号処理論第三」と捉えても良い
- 統計的信号処理、非定常時系列モデル、ベイズ統計学、学習アルゴリズム
- 音声音響信号処理応用

## ■ 対象領域

- 信号推定、音声分析、音声符号化
- 音声認識、音声合成
- その他の音響信号処理

## ■ 講義重点

- 統計的信号処理の基礎
- 基本アルゴリズムの理解

## ■ 前提知識

- 線形系理論とフーリエ解析
- 確率統計学の基礎 (分布、推定)

# 講義前半の内容

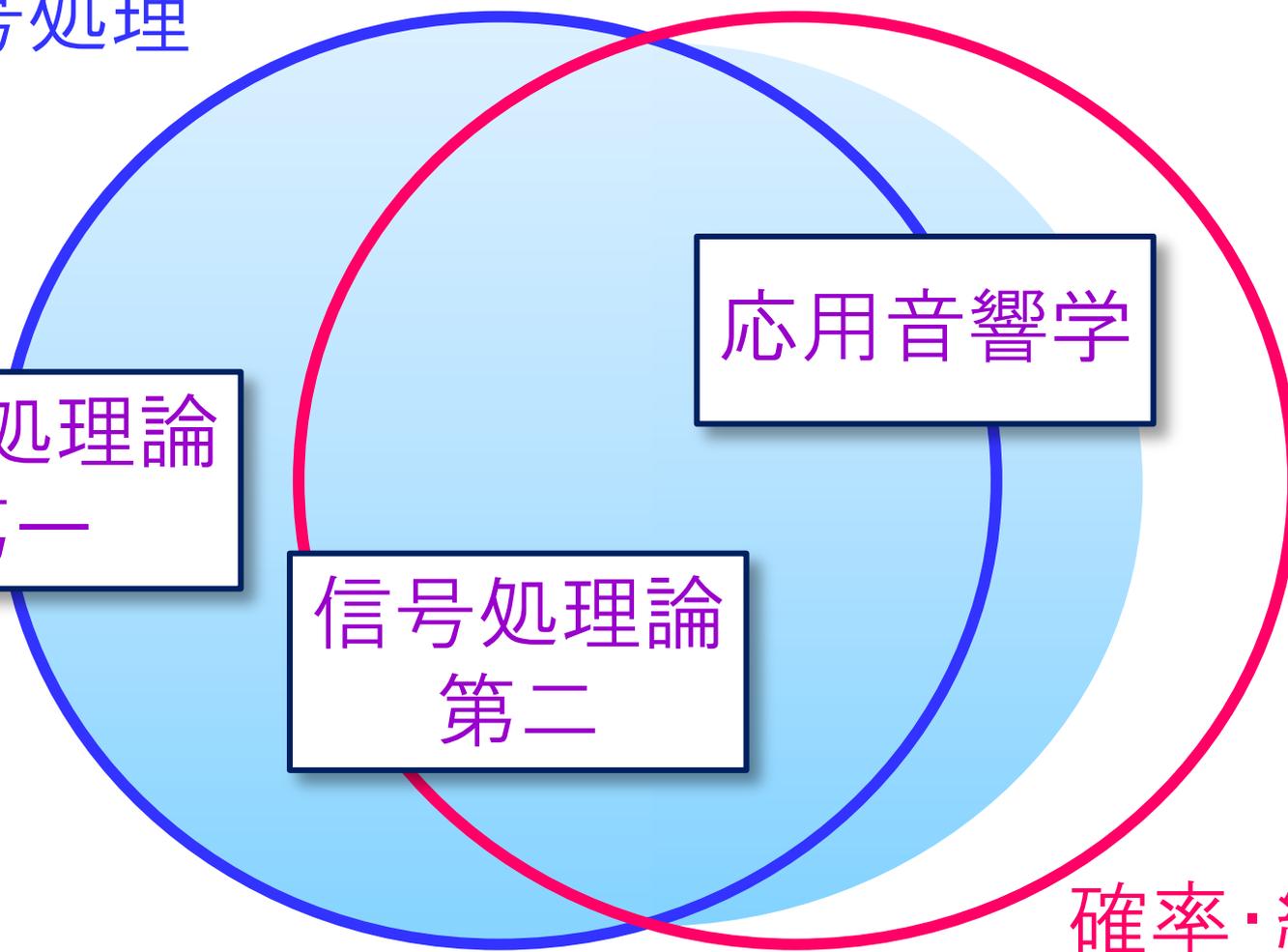
信号処理

信号処理論  
第一

信号処理論  
第二

応用音響学

確率・統計  
パターン認識



# 講義前半の内容

## ■ 信号推定理論

- Wienerフィルタ、Kalmanフィルタ

## ■ 短時間スペクトル分析

- サンプリング定理、量子化雑音
- 高域強調、窓関数
- 短時間自己相関関数
- 短時間スペクトル解析、ピッチ構造
- 短時間ケプストラム解析

## ■ 全極型モデル

- 線形モデル、自己回帰モデル
- 線形予測分析(LPC)
- 残差信号、ピッチ抽出
- 偏自己相関分析(PARCOR)

## ■ スペクトル距離

- 板倉齋藤距離

## ■ クラスタリング解析

- k-means クラスタリング
- スカラー量子化とベクトル量子化
- 混合正規分布とEMアルゴリズム

## ■ 非線形時間伸縮

- 動的時間伸縮、DPマッチング

## ■ 音声の確率モデル

- 自己回帰モデル
- 多次元正規分布、混合正規分布
- 隠れマルコフモデル(HMM)

## ■ 信号処理応用

- 音声認識／合成システム
- 音源分離／音声強調／その他の音響信号処理システム

# 講義資料と成績評価

## ■ 講義資料

- <http://www.sp.ipc.i.u-tokyo.ac.jp/~saruwatari/>

(システム情報第一研究室からたどれるようにしておきます)

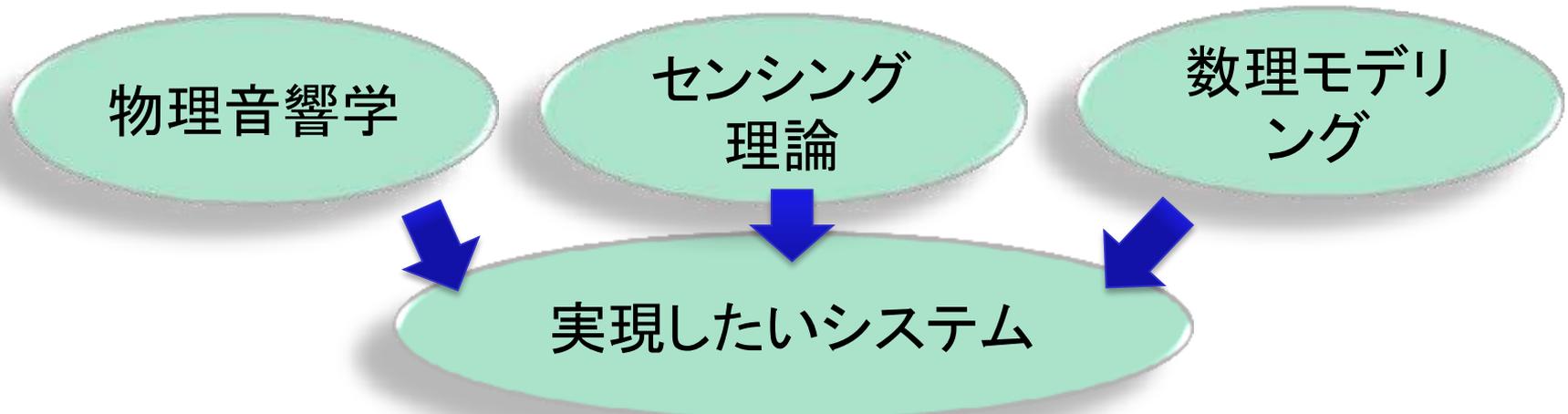
## ■ 成績評価

- 出席点
- 学期末試験

# 音響メディア応用例

# なぜ音メディアに焦点をあてるのか？

- 音メディアに関する信号処理研究の魅力とは？
  - 自然界の音を持つ無限の**多様性** (cf. 無線通信信号)
  - 研究のアプローチに**多面性**あり (決定論的？統計的？)
  - 最後は聴かせてなんぼの評価 ⇒ **芸術性**も併せ持つ
- 「**物理世界(波動)と情報世界(抽象)をまたぐ学問**」であり、かつそれを「**統一的に取り扱うシステム工学**」である。
- 対象の多様性ゆえに「**なんでもあり**」の分野でもある。



# なぜ音メディアに焦点をあてるのか？

波動方程式  
室内音響  
伝達関数  
音生成過程 etc.

物理音響学

離散サンプリング  
フーリエ解析  
球面調和解析  
圧縮センシング etc.

センシング  
理論

統計モデリング  
最尤・ベイズ推定  
機械学習  
スパース最適化

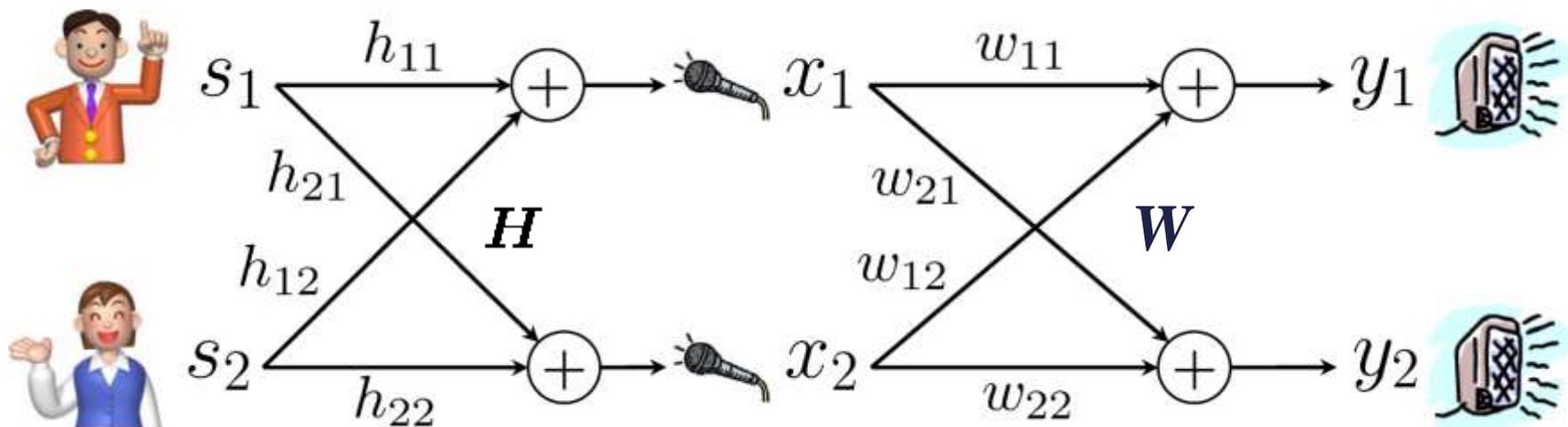
数理モデリ  
ング

実現したいシステム



# 応用紹介: ブラインド音源分離 ( $B_{\text{blind}}S_{\text{source}}S_{\text{eparation}}$ )

- 混ざり合った信号  $x_1, x_2$  から元の信号を取り出す
- どのように混ざったかに関する空間情報  $H$  は利用できない



実は上記は**2つのことを同時に推定**している

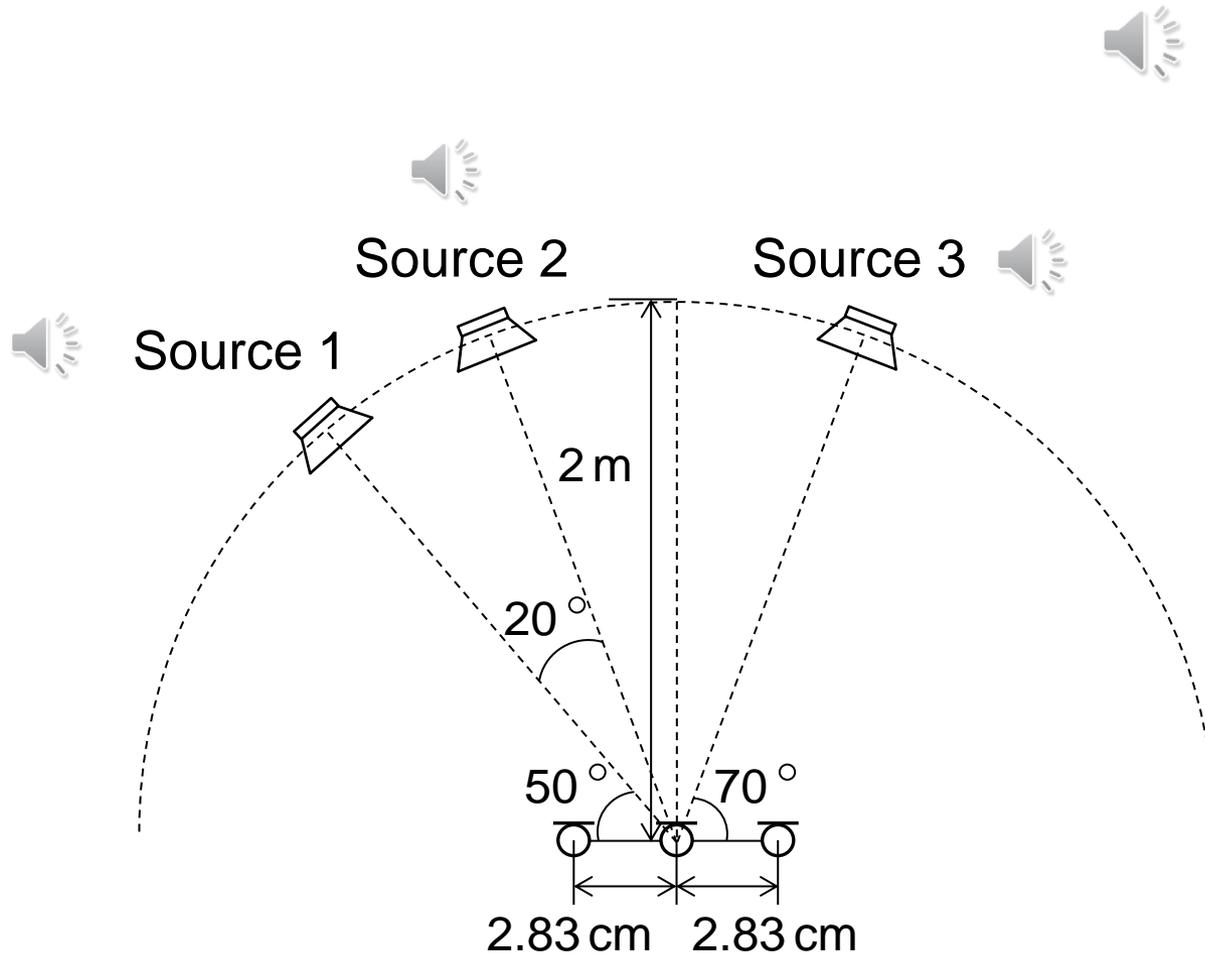
- [空間] 統計的に独立な音源の分類問題 (分離行列  $W$  の推定)
- [信号] 各音源が属する確率分布  $p(y)$  の推定問題

上記を閉形式で解く方法は存在せず凸問題でもない⇒**大変困難!**

# 応用紹介：低ランク近似音源モデルに基づくBSS

[Kitamura, et al. 2015]

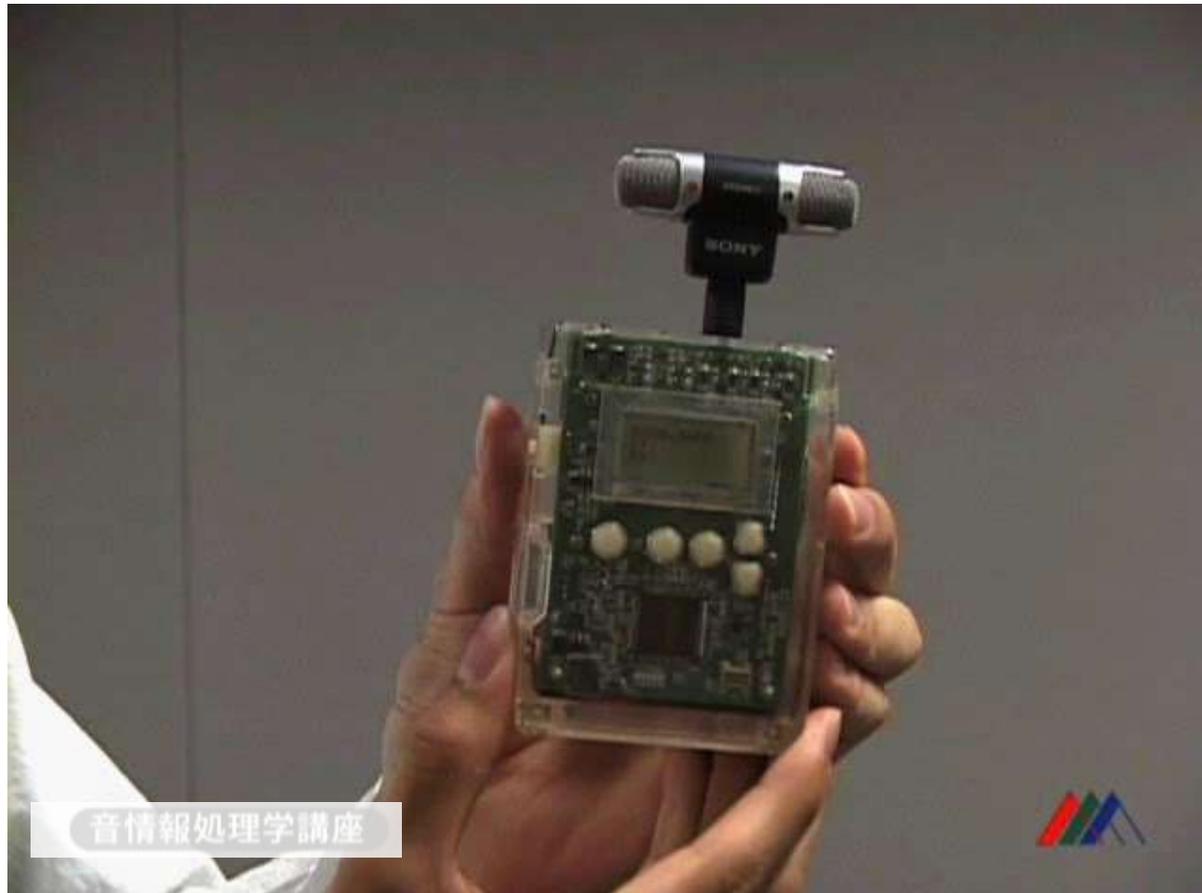
- ドラム、ストリング、音声からなる複合音の分離



# 応用紹介:「聖徳太子マイク」 リアルタイムBSS

[Saruwatari, et al. 2009]

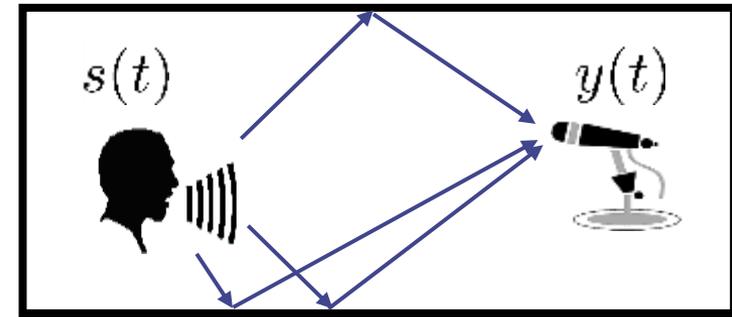
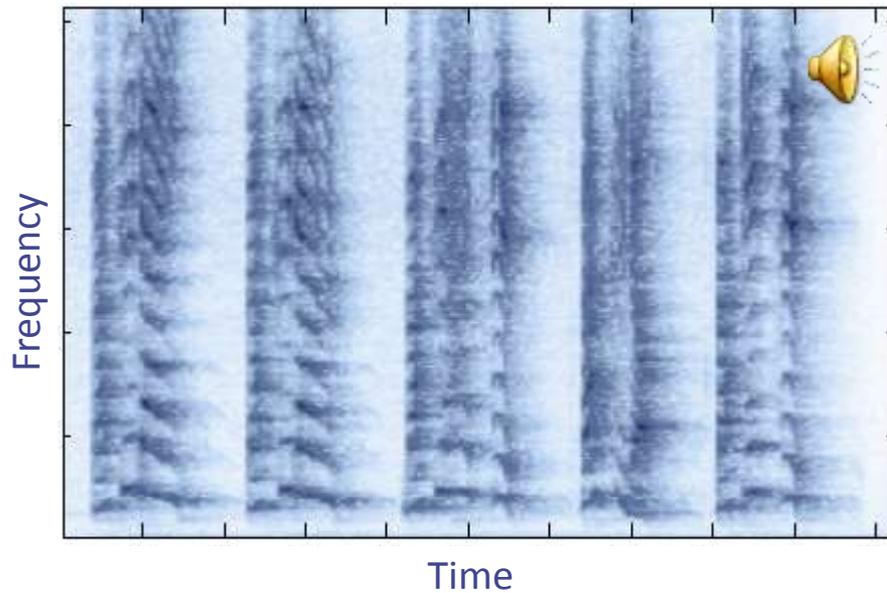
- 4chマイクとDSP(TI社製C67)から構成される独立成分分析BSS専用モジュールを2005年に開発
- 2009年に世界初の商用化(警察備品に採用)



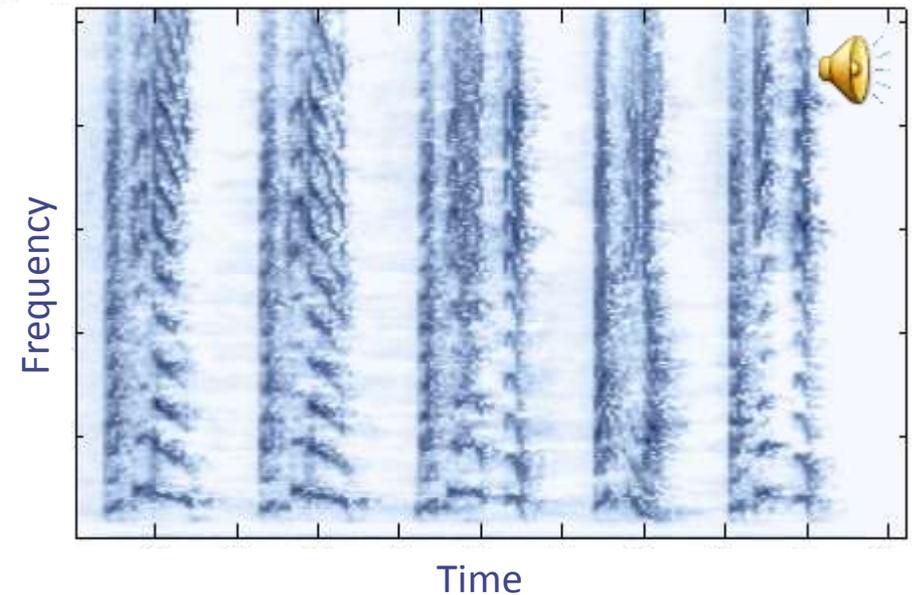
# 応用紹介: 残響抑圧

[Kameoka, et al.]

## ■ 観測信号のスペクトログラム



## ■ 残響除去信号のスペクトログラム



# 応用紹介: 音声合成



入力  $x$  と出力  $y$  の関係をどう記述するか？ → **統計的逆問題**

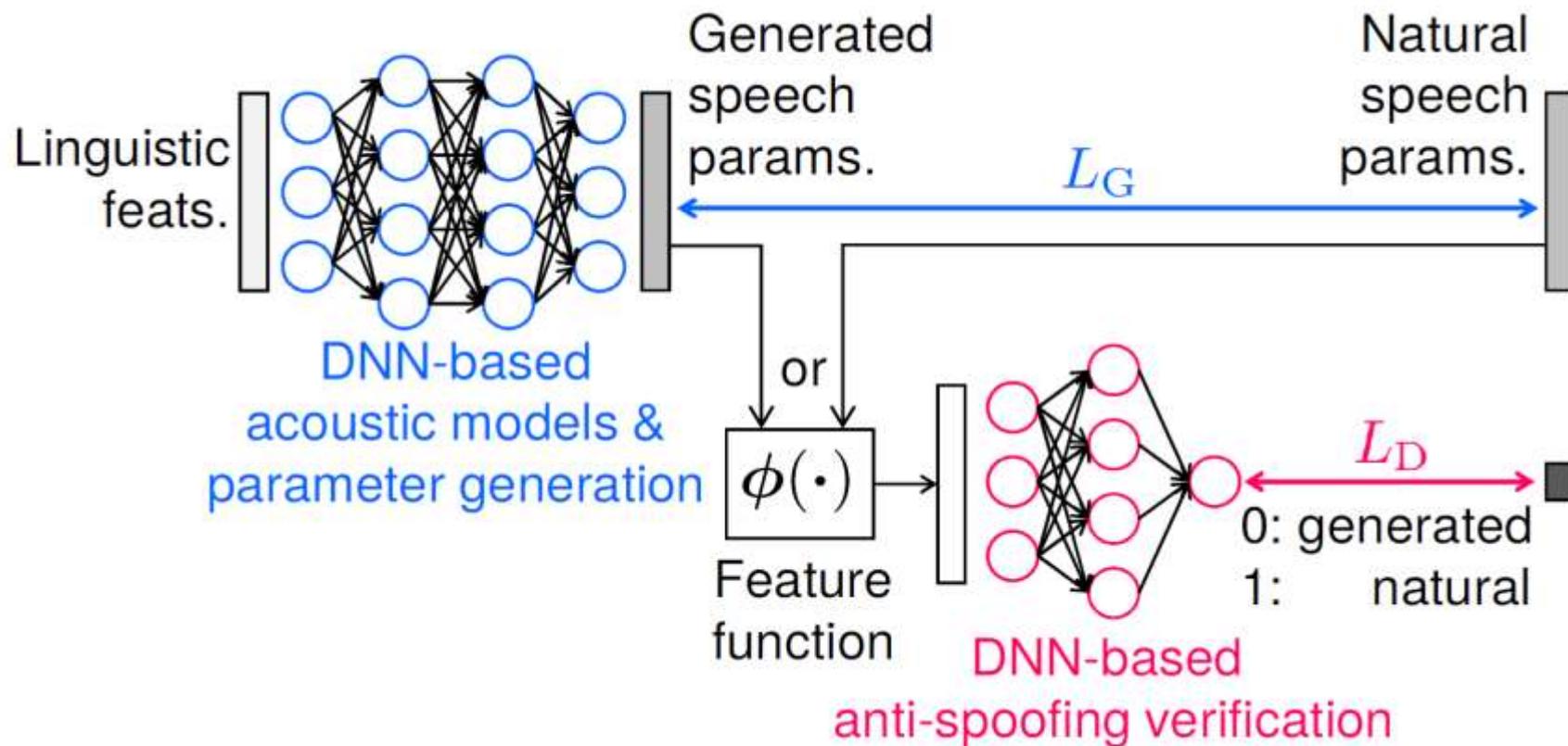
人間らしい声とは何か？ **「人間らしい声」の統計モデル化**

東京大学は世界一！  
昼飯はとんこつラーメンに限る！



# 応用紹介：DNN-GAN音声合成

[Saito, Takamichi, et al. 2016]



# 応用紹介:リアルタイムDNN声質変換 [2019年3月日経xTECH]



<https://www.youtube.com/watch?v=P9rGqoYnfCg>

## ロボット対話 デモンストレーション

Demonstration for  
spoken-oriented hands-free  
interactive robot.

# 応用紹介: 統計的時系列推定における音質の差

[Saruwatari, et al. 2012]

## 白色ノイズの場合

観測音



最尤推定



ベイズ推定



ミュージカル  
ノイズフリー



## 人ごみノイズの場合

観測音



最尤推定



ベイズ推定



ミュージカル  
ノイズフリー



どの推定方式が音として「自然」か？

良い統計的性質を持つ推定法  $\neq$  音響的に優れた技術

# 応用紹介：音バーチャルリアリティ

[Koyama, et al. 2014]

物理的なスピーカ列はここ



# 統計的信号処理の基礎

# 確率則

## ■ 同時確率 (または結合確率)

- $p(x, y)$ : 事象  $x$  と事象  $y$  が同時に起こる確率

## ■ 条件つき確率

- $p(y|x)$ : 事象  $x$  が起こった下で事象  $y$  が起こる確率

$$p(x, y) = p(y|x)p(x) = p(x|y)p(y)$$

## ■ 周辺化

- $p(y) = \int p(x, y) dx$

## ■ 独立性

- $x$  と  $y$  が独立  $\Leftrightarrow p(x, y) = p(x)p(y)$

# ベイズの定理

$$\blacksquare \quad \underline{p(x|y)} = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} = \frac{\underline{p(y|x)}\underline{p(x)}}{\int \underline{p(y|x)}\underline{p(x)}dx}$$

$x$  : 雨が降っている

$y$  : 太郎が傘をもっている



太郎が傘を持って現れた時外で雨が降っている確率  $\underline{p(X=x|Y=y)}$  が、  
普段雨が降ると太郎が傘を持って出かける確率  $\underline{p(Y=y|X=x)}$  と、  
雨が降る確率  $\underline{p(X=x)}$  を使って計算できる

# 確率モデル(尤度関数, 事前確率)

$$\blacksquare \underline{p(\theta|Y)} = \frac{\underline{p(Y|\theta)}\underline{p(\theta)}}{\int_{\theta} \underline{p(Y|\theta)}\underline{p(\theta)}}$$

■ 観測データを  $Y$ 、未知パラメータを  $\theta$  とすると...

■  $p(Y|\theta)$  のことを尤度関数

■  $p(\theta)$  のことを事前確率

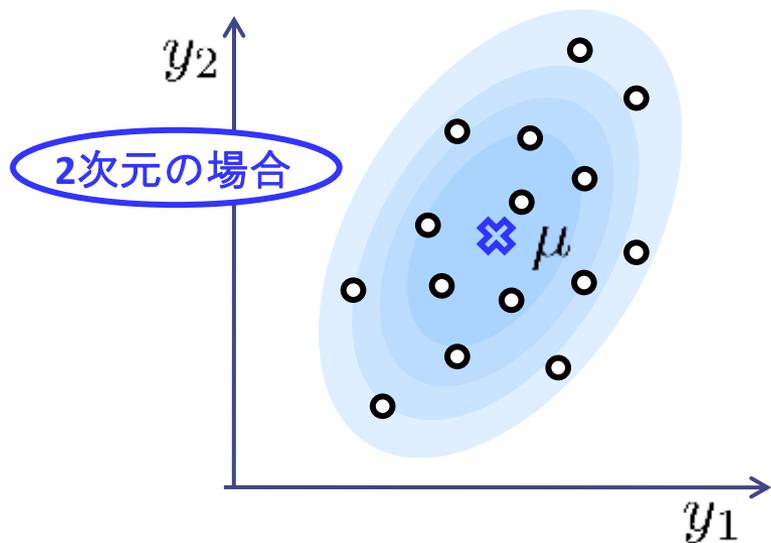
■  $p(\theta|Y)$  のことを事後確率

という

# 確率モデル

## ■ データ $\mathbf{y}$ の確率的な「生成源」 $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$

### 例1) 正規分布 (Normal distribution)

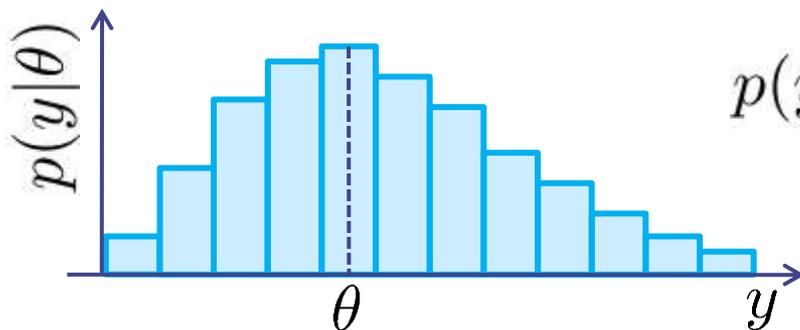


$\{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}\}$  平均、分散

$$p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^K |\boldsymbol{\Sigma}|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})}$$

⇒ 以後  $\mathcal{N}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  と表記

### 例2) Poisson分布



$$p(y|\theta) = \frac{\theta^y e^{-\theta}}{y!} \quad (y \in \mathbb{N})$$

⇒ 以後  $\text{Pois}(y; \theta)$  と表記

# 正規分布に従う確率変数の諸性質

■  $x \sim \mathcal{N}(x; \mu_x, \Sigma_x), y \sim \mathcal{N}(y; \mu_y, \Sigma_y) \dots$

※ 「 $\sim$ 」は「従う」を意味する

■  $x$  と  $y$  が独立なら  $z = x + y \Rightarrow z \sim \mathcal{N}(\mu_x + \mu_y, \Sigma_x + \Sigma_y)$

■  $x$  の線形変換は正規分布に従う

$$z = Ax + b \Rightarrow z \sim \mathcal{N}(z; A\mu_x + b, A\Sigma_x A^T)$$

■  $x$  と  $y$  の結合ベクトルは正規分布に従う

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_x & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_y \end{bmatrix} \right)$$

このときの、 $y$  が与えられた下での  $x$  の条件つき期待値

$$\mathbb{E}[x|y] = \mu_x + \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^+ (y - \mu_y)$$

# Poisson分布に従う確率変数の諸性質

■  $x \sim \text{Pois}(x; \lambda_x)$ ,  $y \sim \text{Pois}(y; \lambda_y)$  のとき...

※ 「 $\sim$ 」は「従う」を意味する

■  $x$  と  $y$  が独立なら  $z = x + y \Rightarrow z \sim \text{Pois}(z; \lambda_x + \lambda_y)$

■  $x$  と  $y$  が独立で  $c = x + y$  のとき  $x|c \sim \text{Binom}(x; c, \lambda_x / (\lambda_x + \lambda_y))$

$y|c \sim \text{Binom}(y; c, \lambda_y / (\lambda_x + \lambda_y))$

二項分布

# パラメータ推定

データの確率的な生成プロセスの仮定(順問題)

⇔ 観測データの確率モデル化

データから生成プロセスのパラメータの推定(逆問題)

⇔ 最尤推定, 最大事後確率推定,  
最小平均二乗誤差推定, ベイズ推論

$p(y|\theta), p(\theta)$  をモデル化

順問題



逆問題

ベイズの定理

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{\int p(y|\theta)p(\theta)d\theta}$$

# ML推定量, MAP推定量, MMSE推定量

## ■ データ $y$ が与えられた下でのパラメータ $\theta$ の推定量

### ■ 最尤(Maximum Likelihood)推定量

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} p(Y|\theta)$$

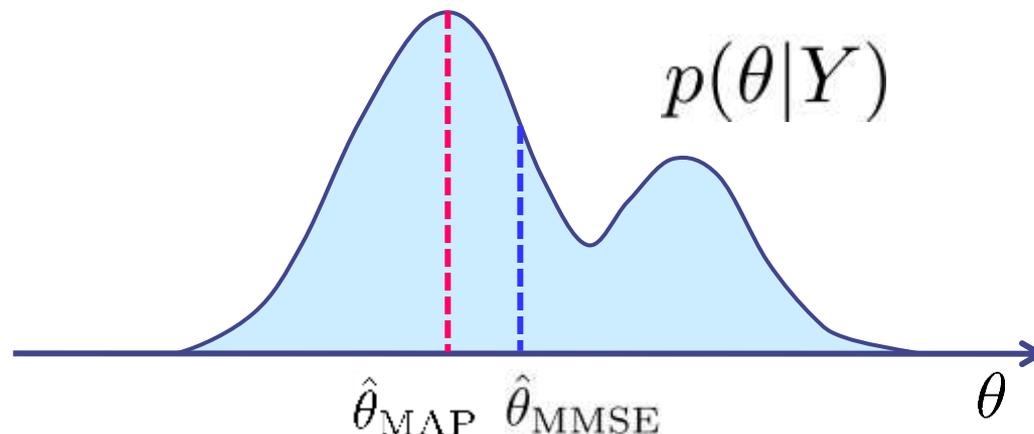
MAP推定で  $p(\theta) \propto 1$   
を仮定した場合に相当

### ■ 最大事後確率(Maximum A Posteriori)推定量

$$\hat{\theta}_{\text{MAP}} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} p(\theta|y) = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} p(y|\theta)p(\theta)$$

### ■ 最小平均二乗誤差(Minimum Mean Squared Error)推定量

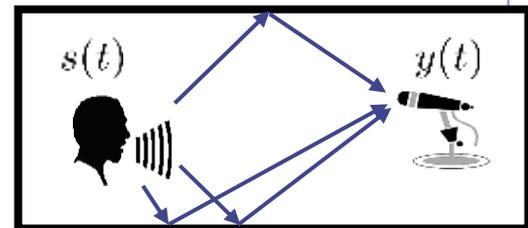
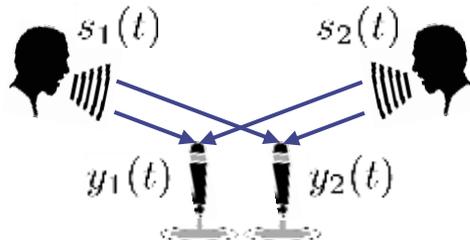
$$\hat{\theta}_{\text{MMSE}} = \underset{\hat{\theta}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2|Y] = \mathbb{E}[\theta|Y]$$



# 音声音響信号処理問題の多くは逆問題

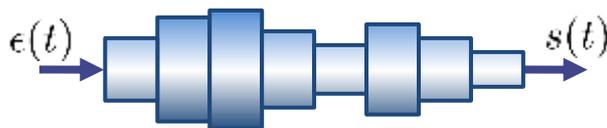
## ■ 音響信号処理

- ブラインド音源分離
- 残響除去
- ...



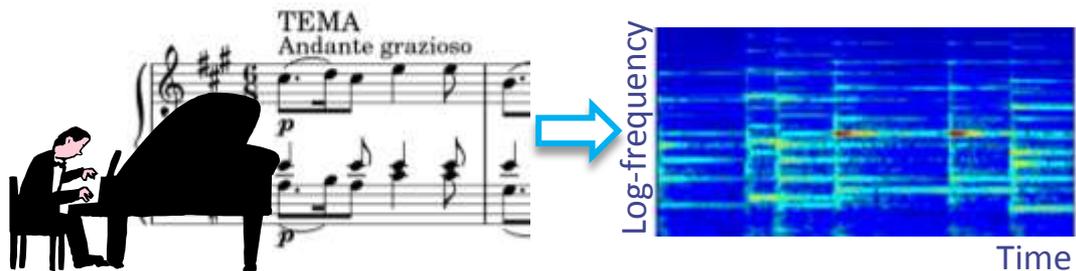
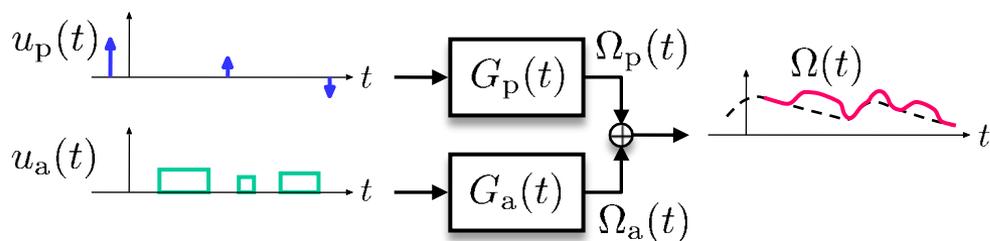
## ■ 音声情報処理

- 音素特徴抽出
- 音声認識
- イントネーション解析

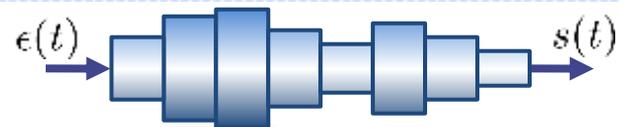


## ■ 音楽情報処理

- 多重音解析
- 自動採譜
- ...

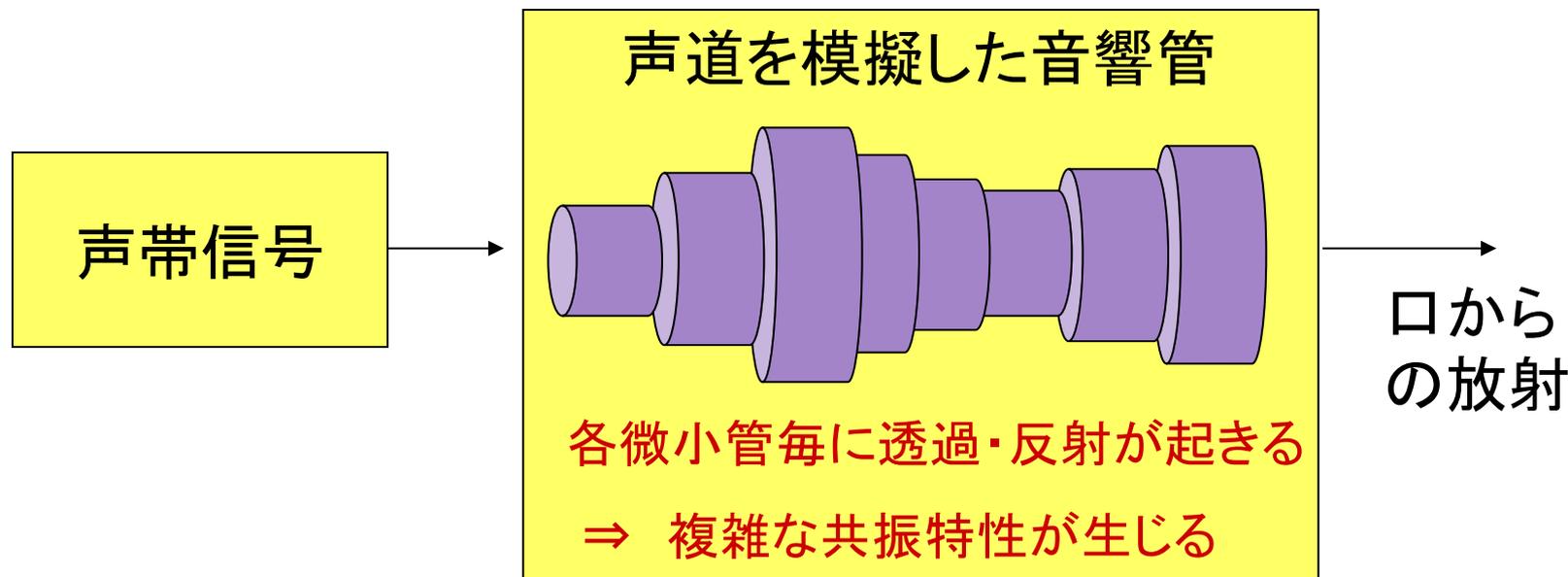


# 携帯電話における逆問題



## ■ 人間の音声生成モデル

- 声帯での基本振動を声道で音色付ける。
- 声道
  - 位置によって太さの異なる音響管の連続と見なせる。
  - 音響管における共振現象 ⇒ **自己回帰 (AR) 過程**



この生成モデルパラメータを求めて伝送する⇒大幅な情報圧縮

# 音声のスペクトル構造

補足

## ■ 短時間スペクトル

- 音声は、短時間区間ごとの電カスペクトル密度(周波数領域におけるパワー特性)で測ることが多い。

## ■ 音声スペクトル構造の2要素

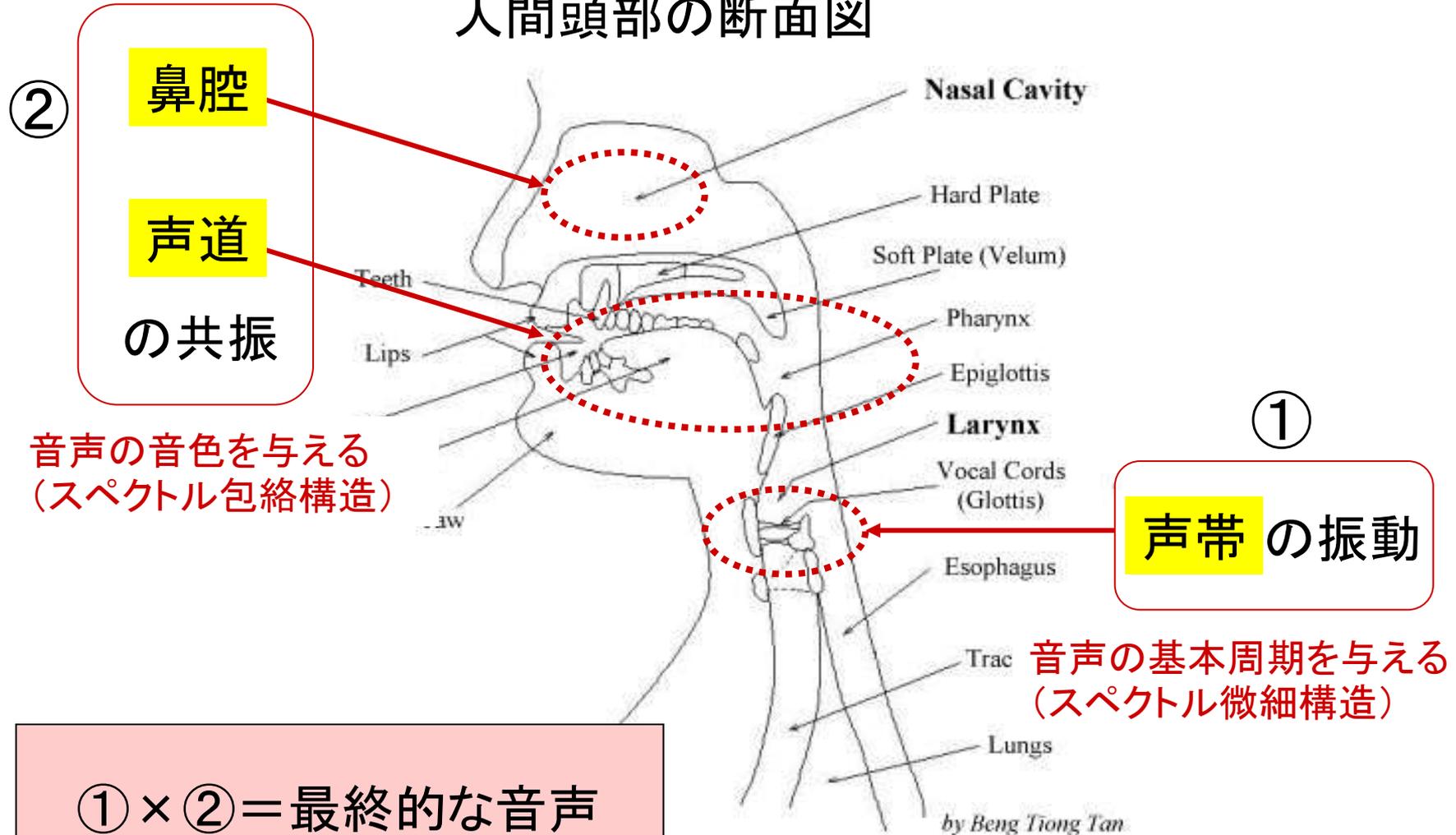
- 周波数とともにゆるやかに変化する成分[スペクトル包絡]  
⇒発声器官の共振・反共振特性を表す  
(つまり人間の喉・口の形をあらわす特徴量)
- 細かく周期的(有声音;母音などの場合)または非周期的(無声音の場合)に変化する成分 [スペクトル微細構造]  
⇒音源の周期性  
(つまり声帯の基本周期・声の高低を表す特徴量)

音声信号のスペクトルはこれら2つの要素の積で表される

# 音声のスペクトル構造

補足

人間頭部の断面図



② 鼻腔

声道

の共振

音声の音色を与える  
(スペクトル包絡構造)

①

声帯の振動

音声の基本周期を与える  
(スペクトル微細構造)

① × ② = 最終的な音声

by Beng Tiong Tan

# 生成モデルアプローチ

- ① 尤度関数の仮定
  - 観測データ  $Y$  を生成する確率的なプロセス  $p(Y|\theta)$  をモデル化
- ② 事前分布の仮定
  - 生成モデルのパラメータ  $\theta$  の生成プロセス  $p(\theta)$  をモデル化

「原因の  
原因」

物理的制約  
/ 経験則

$p(\theta|\alpha)$

「原因」

生成過程

$p(Y|\theta)$

「結果」

$Y$

## ③ 推論(逆問題)

- データ  $Y$  から  $\theta$  と  $\alpha$  を推論
- 最尤推定量  $\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} p(Y|\theta)$ , MAP推定量  $\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} p(\theta, \alpha|Y)$   
MMSE推定量  $\hat{\theta} = \mathbb{E}[\theta, \alpha|Y]$ , ベイズ事後分布  $p(\theta, \alpha|Y)$

生成モデル  
(順問題)

# Wienerフィルタ

# Wienerフィルタの問題設定

## ■ 問題:

- $Y(\omega)$ ,  $X(\omega)$ ,  $N(\omega)$ : 観測信号, 音声信号, 雑音信号の離散 Fourier 変換 (複素スペクトル)
- 雑音重畳音声

$$Y(\omega) = X(\omega) + N(\omega)$$

から音声に関するパラメータ  $\theta$  を推定したい

## ■ 仮定:

- 音声  $X(\omega)$  と雑音  $N(\omega)$  は無相関
- 音声  $X(\omega)$  は平均0の複素正規分布  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \lambda_X(\omega))$  に従う
- 雑音  $N(\omega)$  は平均0の複素正規分布  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \lambda_N(\omega))$  に従う
- 雑音パワースペクトル密度  $\lambda_N(\omega)$  は既知  
(例えば無音声区間から推定済みという状況を想定)

# $X(\omega)$ のMMSE推定量

## ■ 問題設定:

- $Y(\omega) = X(\omega) + N(\omega)$
- $N(\omega) \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(N(\omega); 0, \lambda_N(\omega)), \quad X(\omega) \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(X(\omega); 0, \lambda_X(\omega))$

## ■ 求めたいのは $\hat{X}_{\text{MMSE}}(\omega) = \mathbb{E}[X(\omega)|Y(\omega)]$

### 多変量Gauss分布の性質

$$p(y, x) = \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{x} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{bmatrix} \right) \rightarrow \mathbb{E}[x|y] = \bar{x} + \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^+ (y - \bar{y})$$

$$p(Y(\omega), X(\omega)) = \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \left( \begin{bmatrix} Y(\omega) \\ X(\omega) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_X(\omega) + \lambda_N(\omega) & \lambda_X(\omega) \\ \lambda_X(\omega) & \lambda_X(\omega) \end{bmatrix} \right)$$

$$\rightarrow \mathbb{E}[X(\omega)|Y(\omega)] = \frac{\lambda_X(\omega)}{\lambda_X(\omega) + \lambda_N(\omega)} Y(\omega) \quad (\text{Wienerフィルタ})$$

## ■ 線形推定器

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

- 観測データ  $x(t - \tau)$  の線形結合で推定信号をモデル化

## ■ 平均二乗誤差最小規範

$$J[h(t)] = \mathbb{E}[|\tilde{s}(t) - s(t)|^2]$$

- $J$  を最小にする  $h(t)$  を求めることがここでの問題

# Wiener-Hopf積分方程式の解法

## 復習

- $h(t)$  が非因果的なフィルタの場合

$$R_{sx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - \alpha)h(\alpha)d\alpha$$

両辺をFourier変換

$$S_{sx}(\omega) = S_{xx}(\omega)H(\omega) \longrightarrow H(\omega) = \frac{S_{sx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}$$

- $R_{sn}(\tau) = 0$  の場合

$$R_{sx}(\tau) = R_{ss}(\tau), \quad R_{xx}(\tau) = R_{ss}(\tau) + R_{nn}(\tau)$$

$$H(\omega) = \frac{S_{ss}(\omega)}{S_{ss}(\omega) + S_{nn}(\omega)}$$

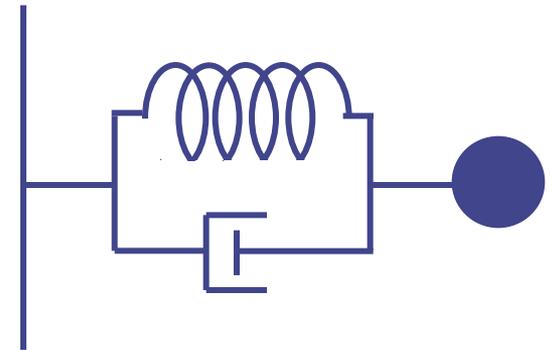
非因果的Wienerフィルタ

多変量ガウス分布の性質から  
導きだされる結果と比較せよ

# カルマンフィルタ

# 測定対象に対するモデルの導入

- 例) バネマスダンパ系の質点位置の推定
  - バネマスダンパ系の質点が、ランダムな外力 $F(t)$ により駆動されている
  - 質点の位置は、観測雑音を含む測定器によって観測される



$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

$$y(t) = x(t) + \underline{w(t)}$$

観測雑音

# 離散時間Kalmanフィルタの問題設定

$$\text{システムモデル: } x_k = \Phi_{k,k-1}x_{k-1} + \underline{B_k v_k}$$

駆動雑音

$$\text{測定モデル: } y_k = C_k x_k + \underline{w_k}$$

観測雑音

## ■ 仮定

$k$ : 時刻インデックス

- $v_k, w_k$  は互いに独立な正規白色雑音

$$\mathbb{E}[v_k] = 0 \quad \mathbb{E}[v_k v_n^T] = V_k \delta_{kn}$$

$$\mathbb{E}[w_k] = 0 \quad \mathbb{E}[w_k w_n^T] = W_k \delta_{kn}$$

$$\mathbb{E}[v_k w_n^T] = 0$$

- パラメータ:  $\Phi_{k,k-1}, B_k, C_k$  と、雑音共分散  $V_k, W_k$  は既知

# 離散時間Kalmanフィルタの構成

## 状態推定値

$$\hat{x}_{k-1|k-1}$$

時刻k-1までの  
観測値を  
用いた時刻k-1  
の状態推定値



時間  
更新

$$\hat{x}_{k|k-1}$$

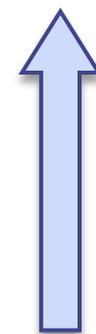
時刻k-1までの  
観測値を  
用いた時刻k  
の状態推定値



計測  
更新

$$\hat{x}_{k|k}$$

時刻kまでの  
観測値を  
用いた時刻k  
の状態推定値



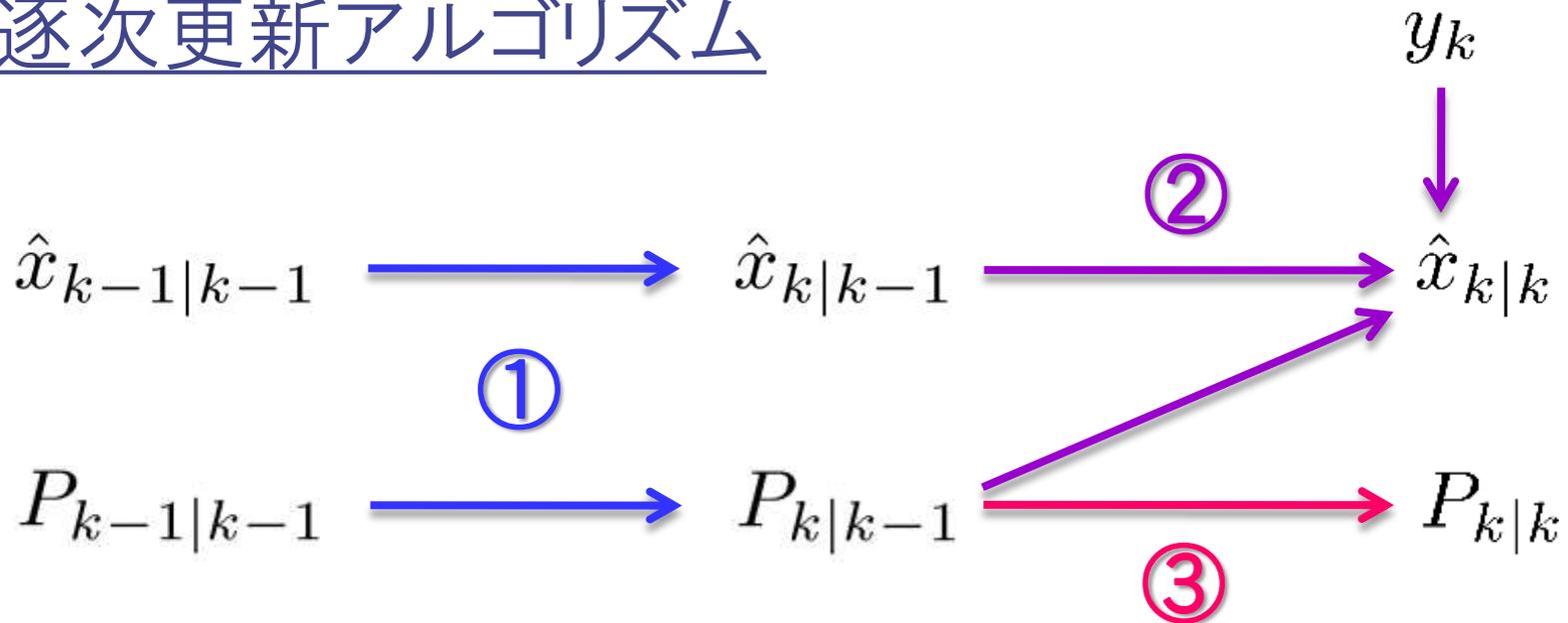
観測値  $y_k$

# 離散時間Kalmanフィルタの目的と導出方針

## ■ 目的

- $\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}$  と  $y_k$  から  $\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}$  を逐次的に計算したい
- ただし  $P_{n|m} = \text{COV}(x_n - \hat{x}_{n|m})$

## 逐次更新アルゴリズム



# ①状態の時間更新

導出の詳細は信号処理論2講義資料参照

$$\hat{x}_{k-1|k-1} \longrightarrow \hat{x}_{k|k-1}$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1|k-1}$$

$$P_{k-1|k-1} \longrightarrow P_{k|k-1}$$

$$\begin{aligned} P_{k|k-1} &= \text{COV}(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) \\ &= \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})^T] \\ &= \Phi_{k,k-1} P_{k-1|k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \underline{B_k V_k B_k^T} \end{aligned}$$

時間更新による分散の増分

## ②状態の計測更新

■  $\hat{x}_{k|k-1}, y_k \longrightarrow \hat{x}_{k|k}$

- イノベーション(観測値に対する予測の誤差)

$$\mu_k = y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}$$



- 更新式

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \underline{K}_k \mu_k$$

Kalmanゲイン(未知)

(参考)  $(\theta, y)$ がガウス分布に従うとき

$$\theta_{\text{MMSE}} = \mathbb{E}[\theta|y] = \bar{\theta} + A_0(y - \bar{y})$$

### ③状態推定値の誤差共分散の更新

$$\blacksquare P_{k|k-1} \longrightarrow P_{k|k}$$

$$P_{k|k}$$

$$= \text{COV}(x_k - \hat{x}_{k|k})$$

$$= \text{COV}(x_k - (\hat{x}_{k|k-1} + K_k \underline{\mu}_k))$$

$$= \text{COV}(x_k - (\hat{x}_{k|k-1} + K_k (\underline{y}_k - C_k \hat{x}_{k|k-1})))$$

$$= \text{COV}(\underline{x}_k - (\underline{\hat{x}}_{k|k-1} + K_k (C_k \underline{x}_k + w_k - C_k \underline{\hat{x}}_{k|k-1})))$$

$$= \text{COV}((I - K_k C_k)(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) - K_k w_k) \quad \because w \text{ は } x, \hat{x} \text{ と独立}$$

$$= \text{COV}((I - K_k C_k)(x_k - \hat{x}_{k|k-1})) + \text{COV}(K_k w_k)$$

$$= (I - K_k C_k) \text{COV}(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) (I - K_k C_k)^\top + K_k \text{COV}(w_k) K_k^\top$$

$$= (I - K_k C_k) P_{k|k-1} (I - K_k C_k)^\top + K_k W_k K_k^\top$$

## ②最適Kalmanゲインの導出

### ■ Kalmanゲインを決定する最適化問題

$$\mathbb{E}[\|x_k - \hat{x}_{k|k}\|_2^2] \rightarrow \text{minimize}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|x_k - \hat{x}_{k|k}\|_2^2] &= \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k})^\top (x_k - \hat{x}_{k|k})] \\ &= \text{tr}(\mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^\top]) \\ &= \text{tr}(\underline{P_{k|k}}) \\ &= \text{tr}((I - K_k C_k) P_{k|k-1} (I - K_k C_k)^\top + K_k W_k K_k^\top)\end{aligned}$$

## ②最適Kalmanゲインの導出

### ■最適化規準

$$\begin{aligned}\text{tr}(P_{k|k}) &= \text{tr}\left((I - K_k C_k)P_{k|k-1}(I - K_k C_k)^\top + K_k W_k K_k^\top\right) \\ &= \text{tr}\left(P_{k|k-1} - \underline{K_k} C_k P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C_k^\top \underline{K_k}^\top \right. \\ &\quad \left. + \underline{K_k} C_k P_{k|k-1} C_k^\top \underline{K_k}^\top + \underline{K_k} W_k \underline{K_k}^\top\right)\end{aligned}$$

■  $\text{tr}(P_{k|k})$  を最小化する  $K_k$  は  $\frac{\partial \text{tr}(P_{k|k})}{\partial K_k} = 0$  を満たす

$$\frac{\partial \text{tr}(P_{k|k})}{\partial K_k} = -2P_{k|k-1} C_k^\top + 2K_k (C_k P_{k|k-1} C_k^\top + W_k)$$

$$= 0 \quad \because \text{トレースの微分公式より}$$

$$\frac{\partial \text{tr}(MK^\top)}{\partial K} = M, \quad \frac{\partial \text{tr}(KMK^\top)}{\partial K} = KM^\top + KM$$

$$\therefore \hat{K}_k = P_{k|k-1} C_k^\top (C_k P_{k|k-1} C_k^\top + W_k)^{-1}$$

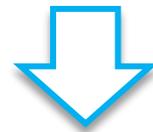
### ③最適Kalmanゲインにおける推定誤差共分散

- $P_{k|k}$  に  $\hat{K}_k$  を代入

$$P_{k|k} = (I - K_k C_k) P_{k|k-1} (I - K_k C_k)^T + K_k W_k K_k^T$$

$$\hat{K}_k = P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} C_k^T + W_k)^{-1}$$

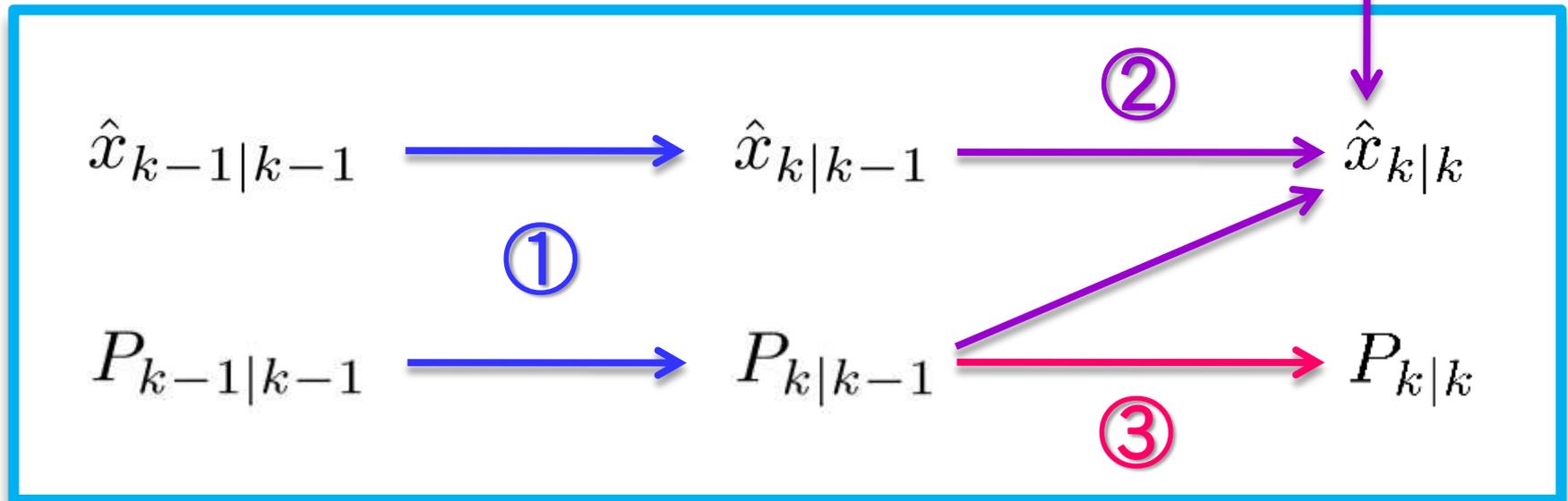
(最適Kalmanゲイン)



$$\hat{K}_k (C_k P_{k|k-1} C_k^T + W_k) \hat{K}_k^T = P_{k|k-1} C_k^T \hat{K}_k^T$$

$$P_{k|k} = (I - \hat{K}_k C_k) P_{k|k-1}$$

# 離散時間Kalmanフィルタのまとめ



- ① 
$$\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1|k-1}$$
$$P_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} P_{k-1|k-1} \Phi_{k,k-1}^T + B_k V_k B_k^T$$
- ② 
$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} C_k^T + W_k)^{-1} (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1})$$
- ③ 
$$P_{k|k} = (I - P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} C_k^T + W_k)^{-1} C_k) P_{k|k-1}$$

# 逐次更新アルゴリズムで計算される確率分布

■  $p(x_{k-1} | y_{1:k-1})$

- 時刻 $t_1$ から $t_{k-1}$ までの観測信号が与えられたもとでの時刻 $t_{k-1}$ における状態推定値の事後確率分布

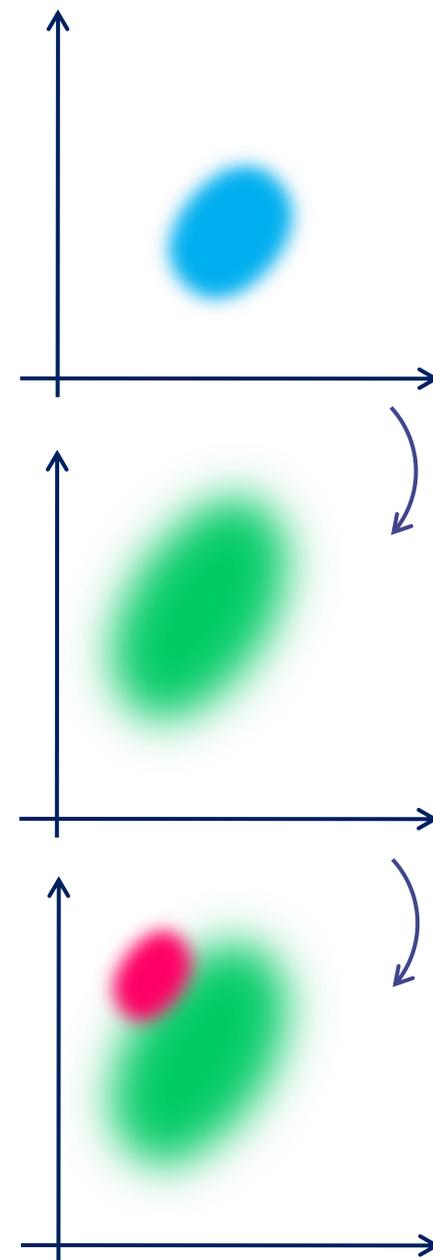
$\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}$ : この分布の平均と共分散行列に相当

■  $p(x_k | y_{1:k-1})$

- 時刻 $t_{k-1}$ における上記事後分布を手がかりに推測される、時刻 $t_k$ における状態推定値の事前確率分布

■  $p(x_k | y_{1:k}) = p(x_k | y_k, y_{1:k-1})$

- 上記事前分布と時刻 $t_k$ における観測信号をもとに得られる、時刻 $t_k$ における状態推定値の事後確率分布



# 離散時間KalmanフィルタのBayes的解釈

$$p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1})$$

システムモデルより:

$$p(x_k|x_{k-1}) = \mathcal{N}(\Phi_{k,k-1}x_{k-1}, B_k V_k B_k^\top)$$

計測モデルより:

$$p(y_k|x_k) = \mathcal{N}(C_k x_k, W_k)$$

時間更新  $p(x_k|y_{1:k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1}) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) dx_{k-1}$

計測更新  $p(x_k|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})}$   
 $= \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})}{\int p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1}) dx_k}$

$$p(x_k|y_{1:k}) = \mathcal{N}(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$$