東京大学工学部 4年生 夏学期

応用音響学
第4回 (5/10)

猿渡　洋

東京大学大学院情報理工学系研究科
創造情報/システム情報学専攻
hiroshi_saruwatari@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

2019年度講義スケジュール

前半（猿渡担当）

- 4/05: 第1回
- 4/19: 第2回
- 4/26: 第3回
- 5/10: 第4回
- 5/17は休講予定
- 5/24: 第5回
- 5/31: 第6回

後半（小山先生担当）

- 6/07: 第7回
- 6/14: 第8回
- 6/21: 第9回
- 6/28: 第10回
- 7/05: 第11回
- 7/12は休講予定

- 7/26: 学期末試験（予定）

講義資料と成績評価

- 講義資料
  - http://www.sp.ipc.i.u-tokyo.ac.jp/~saruwatari/
    （システム情報第一研究室からたどれるようにしておきます）
- 成績評価
  - 出席点
  - 学期末試験

本日の話題

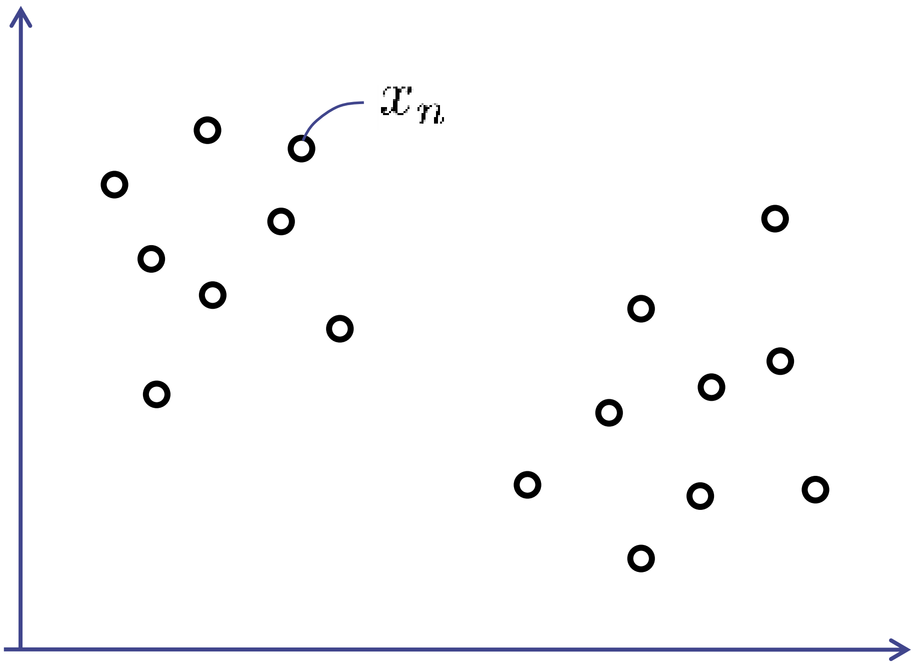
- 確率モデル（生成モデル）による
  パターン認識（クラスタリング）問題の定式化
  - k-meansクラスタリング
  - k-meansクラスタリングの生成モデルとしての解釈
  - 最尤推定
  - 混合正規分布モデル (Gaussian Mixture Model; GMM)
  - EMアルゴリズム
    - 補助関数とJensen不等式
  - EMアルゴリズムによるGMMパラメータの最尤推定とk-meansアルゴリズムの関係
  - 応用例：空間クラスタリングによる音響信号分離

本日の話題

- 確率モデル（生成モデル）による
  パターン認識（クラスタリング）問題の定式化
  - k-meansクラスタリング
  - k-meansクラスタリングの生成モデルとしての解釈
  - 最尤推定
  - 混合正規分布モデル (Gaussian Mixture Model; GMM)
  - EMアルゴリズム
    - 補助関数とJensen不等式
  - EMアルゴリズムによるGMMパラメータの最尤推定とk-meansアルゴリズムの関係

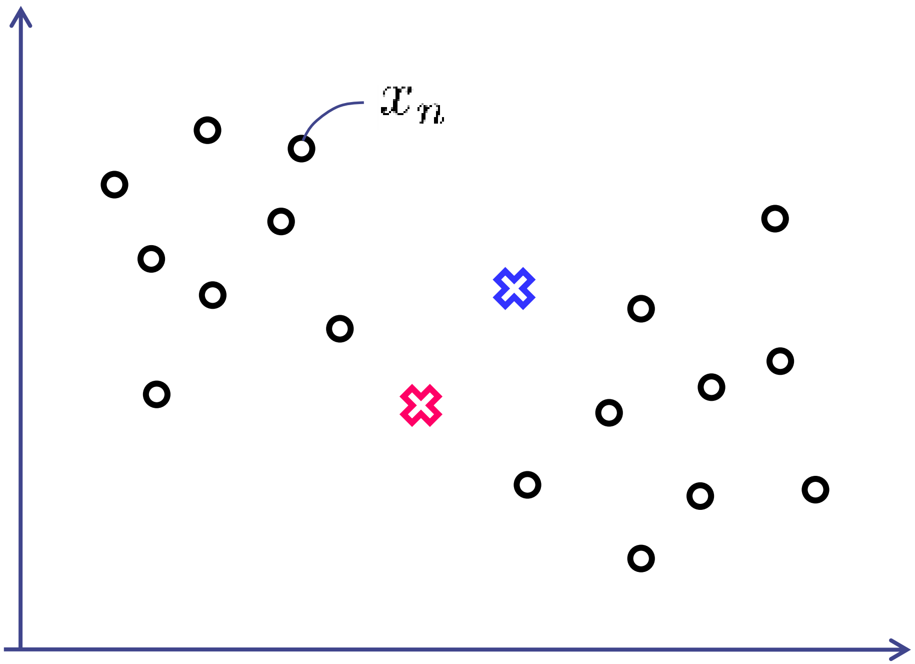
k-meansクラスタリング

- データ $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ の教師なしクラスタリングの一手法



k-meansクラスタリング

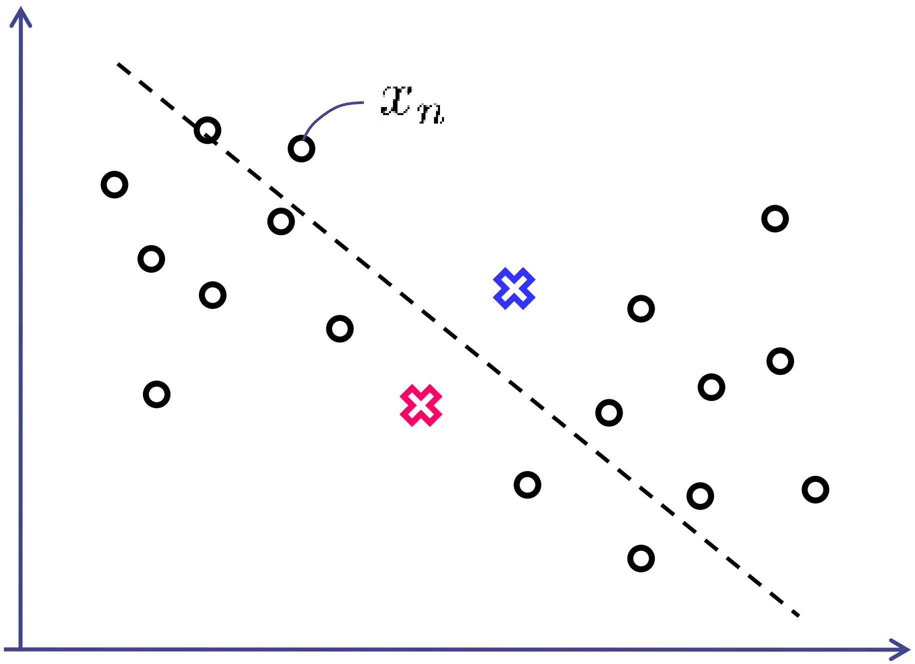
- データ $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ の教師なしクラスタリングの一手法



(Step 0)
クラスタ代表値を初期設定

k-meansクラスタリング

- データ $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ の教師なしクラスタリングの一手法

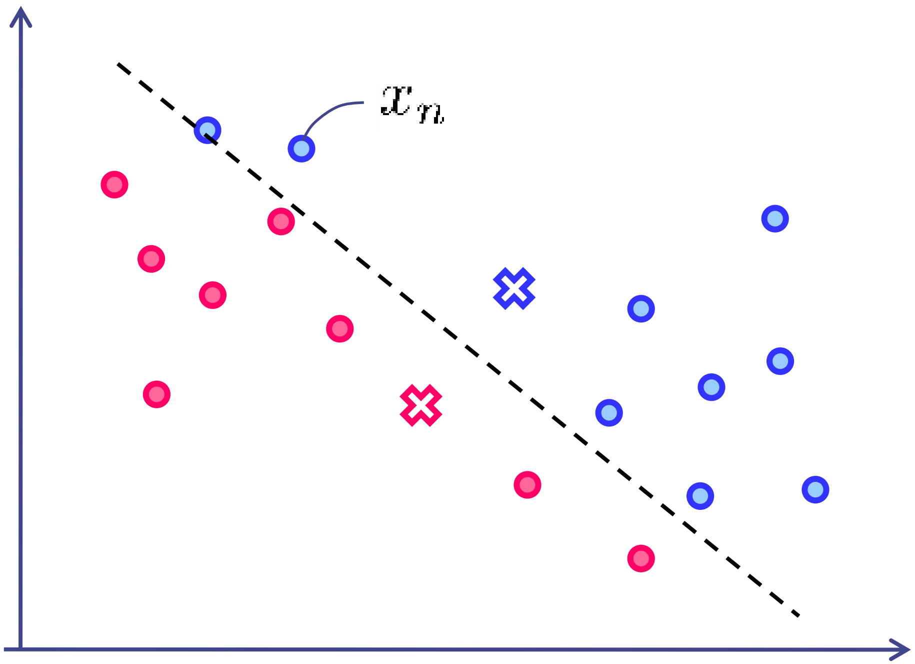


(Step 0)
クラスタ代表値を初期設定

(Step 1)
クラスタ境界を決定

k-meansクラスタリング

- データ $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ の教師なしクラスタリングの一手法

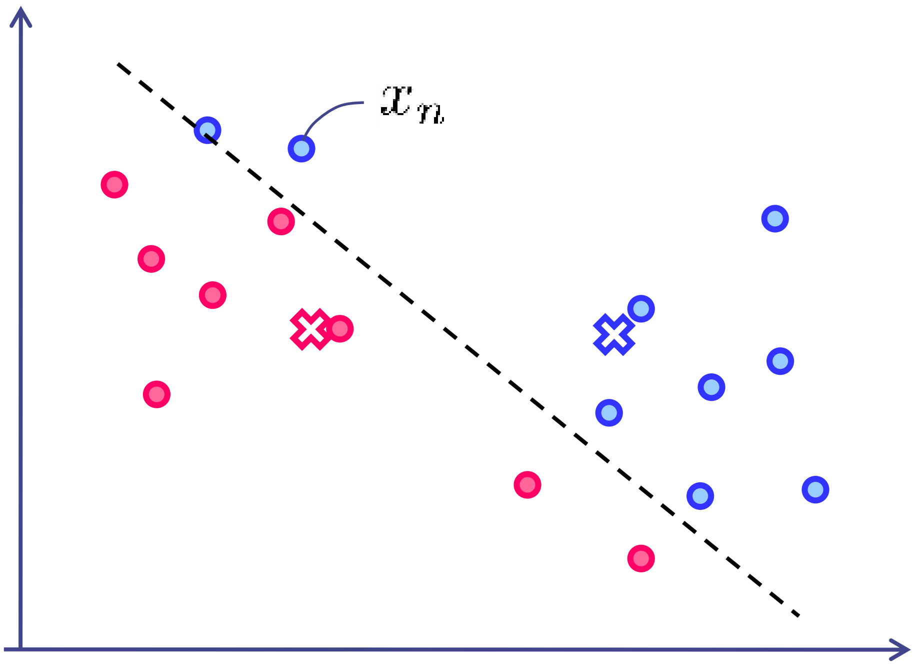


(Step 0)
クラスタ代表値を初期設定

(Step 1)
クラスタ境界を決定

k-meansクラスタリング

- データ $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ の教師なしクラスタリングの一手法



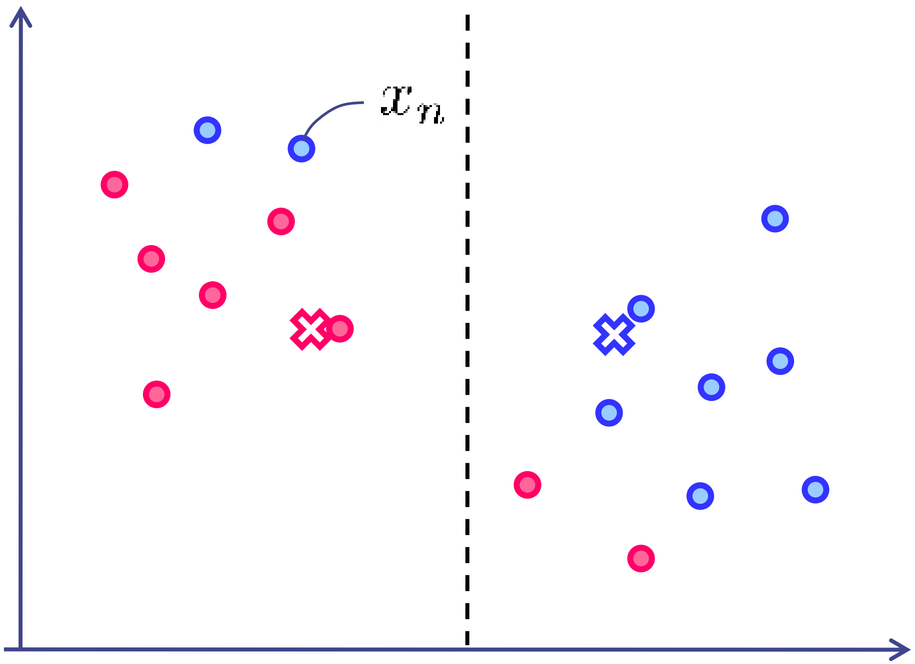
(Step 0)
クラスタ代表値を初期設定

(Step 1)
クラスタ境界を決定

(Step 2)
クラスタ代表値を決定

k-meansクラスタリング

- データ $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ の教師なしクラスタリングの一手法



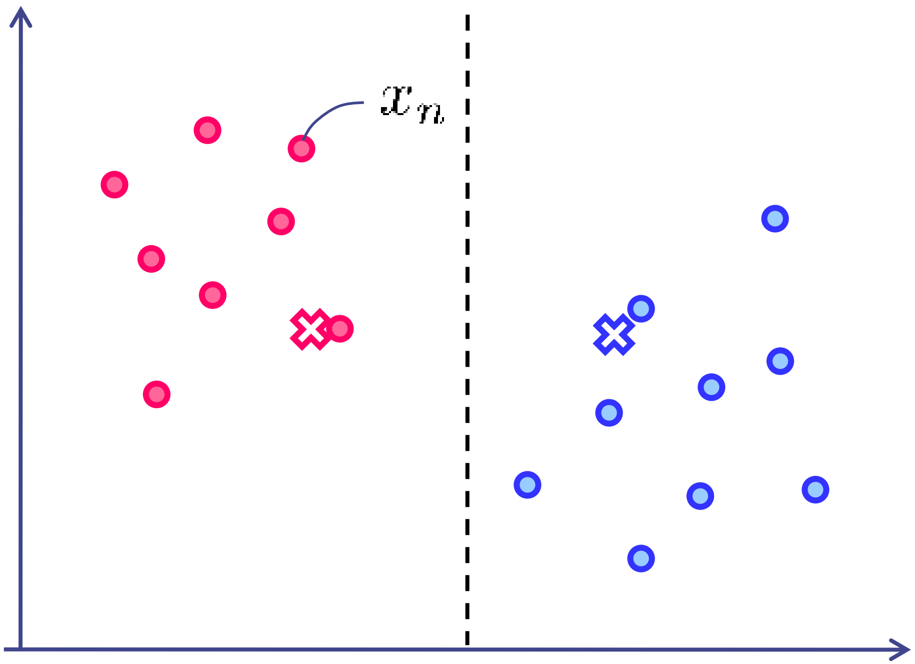
(Step 0)
クラスタ代表値を初期設定

(Step 1)
クラスタ境界を決定

(Step 2)
クラスタ代表値を決定

k-meansクラスタリング

■データ $X=\{x_1,\ldots,x_N\}$ の教師なしクラスタリングの一手法



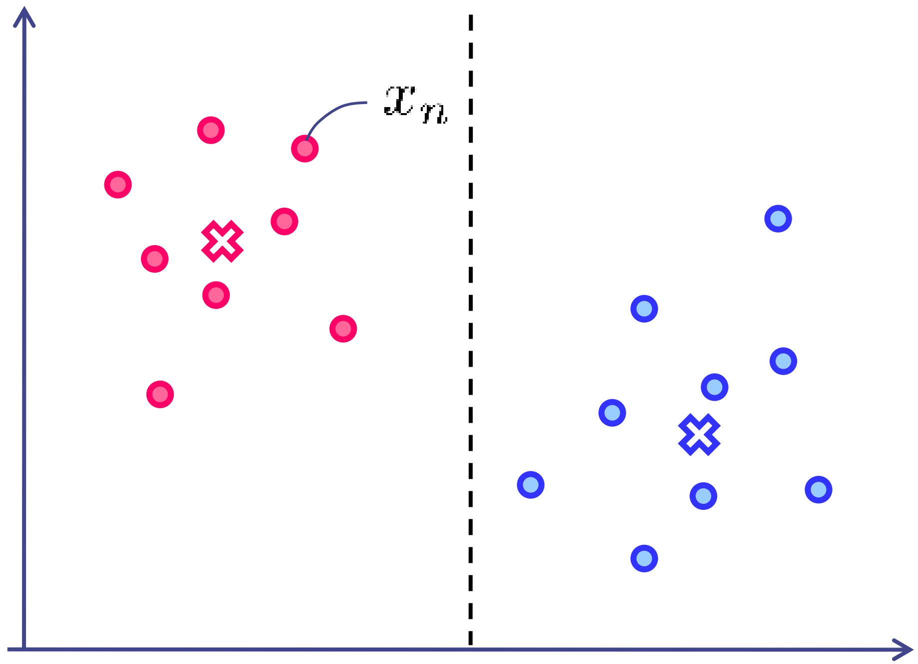
(Step 0)
クラスタ代表値を初期設定

(Step 1)
クラスタ境界を決定

(Step 2)
クラスタ代表値を決定

k-meansクラスタリング

- データ $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ の教師なしクラスタリングの一手法



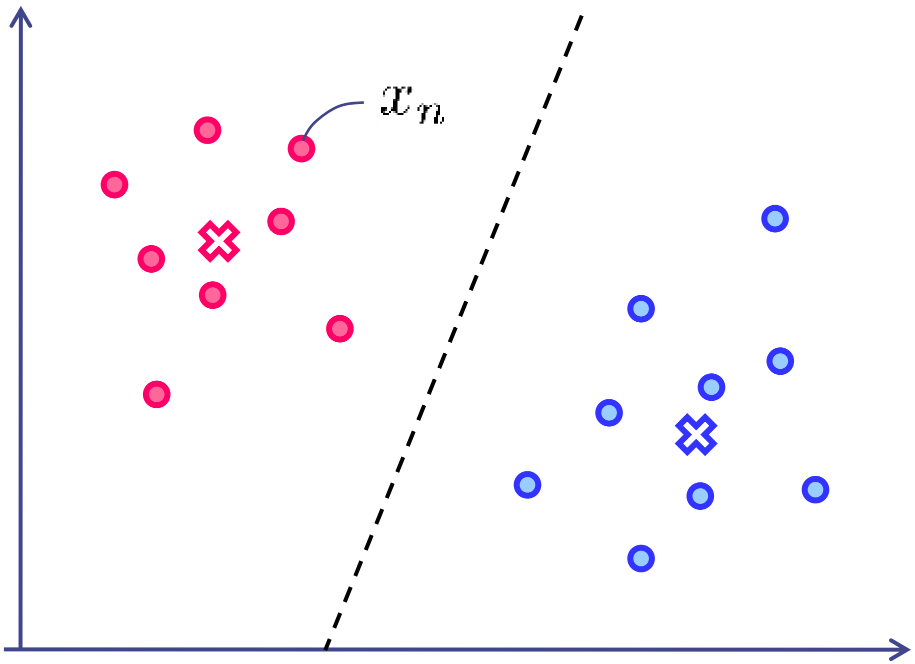
(Step 0)
クラスタ代表値を初期設定

(Step 1)
クラスタ境界を決定

(Step 2)
クラスタ代表値を決定

k-meansクラスタリング

- データ $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ の教師なしクラスタリングの一手法



(Step 0)
クラスタ代表値を初期設定

(Step 1)
クラスタ境界を決定

(Step 2)
クラスタ代表値を決定

k-meansクラスタリング

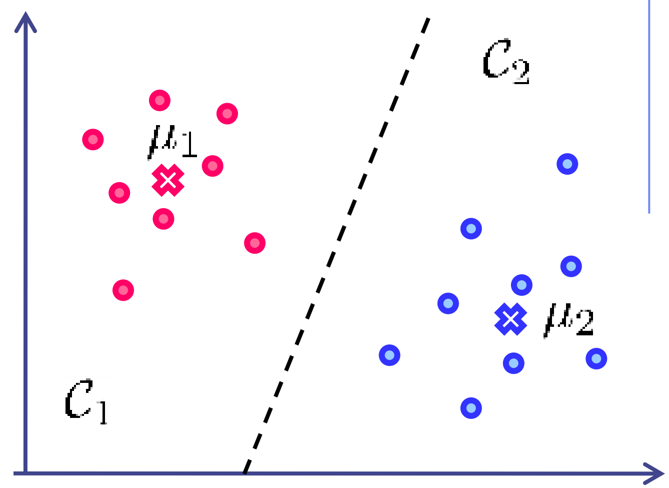
アルゴリズムの収束性

- クラスタリングの目的関数

$$J(Z,\mu) \equiv \sum_k \sum_n \mathbf{1}[z_n = k] \underline{\|x_n - \mu_k\|_2^2}$$

散らばり

$$\mathbf{1}[z_n = k] = \begin{cases} 1 & (z_n = k) \\ 0 & (z_n \neq k) \end{cases}$$



- $\{\mu_1, \ldots, \mu_K\}$: クラスタ代表値
- $\{z_1, \ldots, z_N\}$: 各データの帰属クラスタ

- 反復アルゴリズム
  - **(Step 1)** $\hat{Z} \leftarrow \operatorname*{argmin}_Z J(Z,\mu)$ ⇒明らかに $\hat{z}_n = \operatorname*{argmin}_j \|x_n - \mu_j\|_2^2$
  - **(Step 2)** $\hat{\mu} \leftarrow \operatorname*{argmin}_\mu J(Z,\mu)$ ⇒ $\partial J(Z,\mu)/\partial \mu_j = 0$ を解くと

$$\hat{\mu}_j = \underline{\frac{\sum_n \mathbf{1}[z_n = j] x_n}{\sum_n \mathbf{1}[z_n = j]}}$$

クラスタ重心

目的関数は当然単調減少する
→収束性が保証される

本日の話題

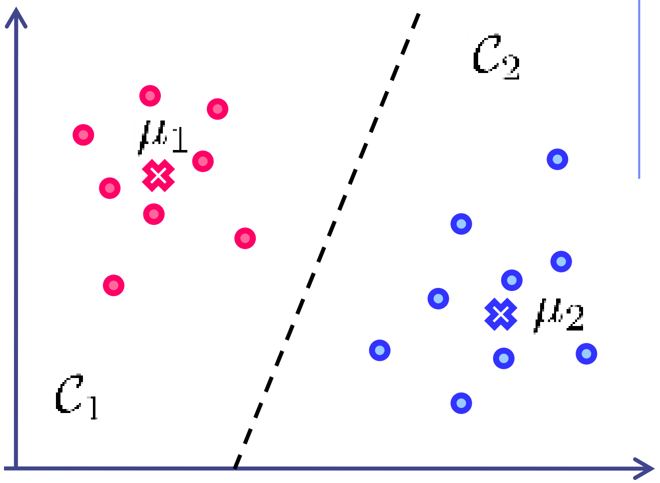
- 確率モデル（生成モデル）による
  パターン認識（クラスタリング）問題の定式化
  - k-meansクラスタリング
  - k-meansクラスタリングの生成モデルとしての解釈
  - 最尤推定
  - 混合正規分布モデル (Gaussian Mixture Model; GMM)
  - EMアルゴリズム
    - 補助関数とJensen不等式
  - EMアルゴリズムによるGMMパラメータの最尤推定とk-meansアルゴリズムの関係

本日の話題

- 確率モデル(生成モデル)による
  パターン認識(クラスタリング)問題の定式化
  - k-meansクラスタリング
  - k-meansクラスタリングの生成モデルとしての解釈
  - 最尤推定
  - 混合正規分布モデル (Gaussian Mixture Model; GMM)
  - EMアルゴリズム
    - 補助関数とJensen不等式
  - EMアルゴリズムによるGMMパラメータの最尤推定とk-meansアルゴリズムの関係

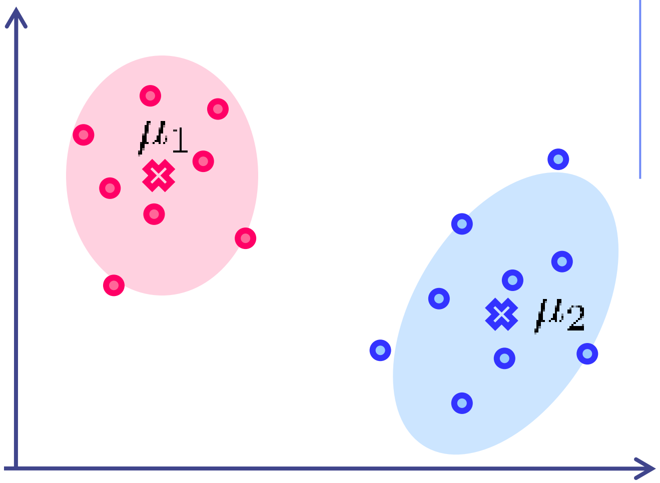
k-meansクラスタリングの生成モデルとしての解釈

- K個のクラスタ（塊）からなるデータの生成プロセスを確率モデルで表現できないか？
  - クラスタリング問題はその逆プロセス



k-meansクラスタリングの生成モデルとしての解釈

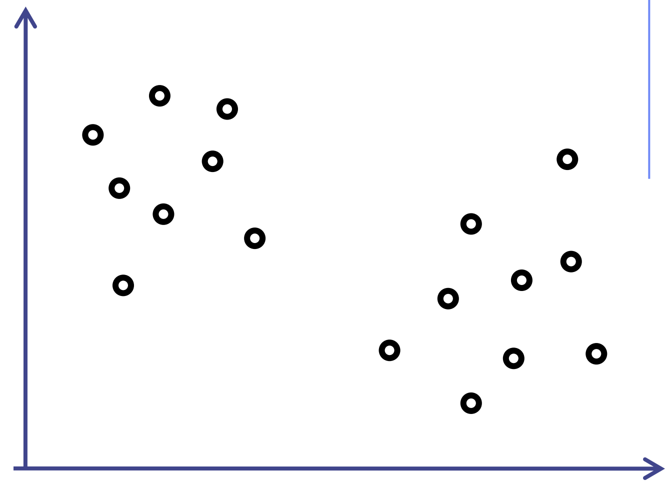
- K個のクラスタ（塊）からなるデータの生成プロセスを確率モデルで表現できないか？
  - クラスタリング問題はその逆プロセス
- 生成プロセスの例
  - K個の正規分布をランダムに生成
  - サンプルごとに
    - 正規分布のクラス番号をランダムに選択
    - 選択されたクラス番号の正規分布に従ってサンプル値を生成
  - 生成された全サンプルが観測データ！



k-meansクラスタリングの生成モデルとしての解釈

- K個のクラスタ（塊）からなるデータの生成プロセスを確率モデルで表現できないか？
  - クラスタリング問題はその逆プロセス
- 生成プロセスの例
  - K個の正規分布をランダムに生成
  - サンプルごとに
    - 正規分布のクラス番号をランダムに選択
    - 選択されたクラス番号の正規分布に従ってサンプル値を生成
  - 生成された全サンプルが観測データ！
- データの確率的な生成プロセスの仮定

⇔データの確率モデル化



本日の話題

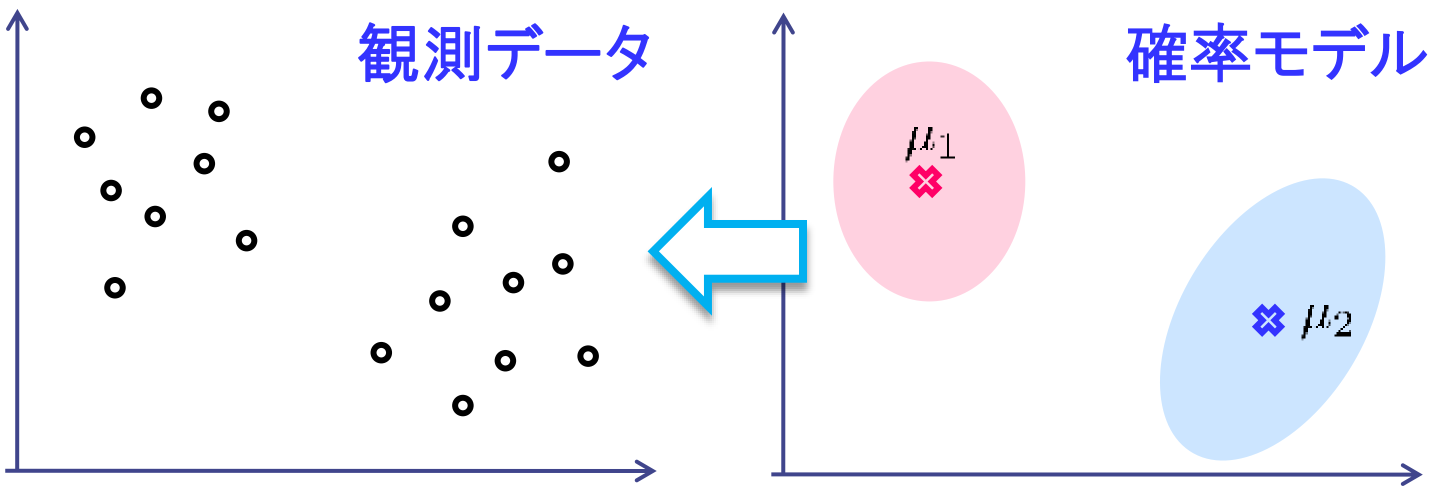
- 確率モデル（生成モデル）による
  パターン認識（クラスタリング）問題の定式化
  - k-meansクラスタリング
  - k-meansクラスタリングの生成モデルとしての解釈
  - 最尤推定
  - 混合正規分布モデル (Gaussian Mixture Model; GMM)
  - EMアルゴリズム
    - 補助関数とJensen不等式
  - EMアルゴリズムによるGMMパラメータの最尤推定とk-meansアルゴリズムの関係

本日の話題

- 確率モデル(生成モデル)による
  パターン認識(クラスタリング)問題の定式化
  - k-meansクラスタリング
  - k-meansクラスタリングの生成モデルとしての解釈
  - 最尤推定
  - 混合正規分布モデル (Gaussian Mixture Model; GMM)
  - EMアルゴリズム
    - 補助関数とJensen不等式
  - EMアルゴリズムによるGMMパラメータの最尤推定とk-meansアルゴリズムの関係

最尤推定

- データから、尤度関数が最大となる確率モデルのパラメータを推定するための一般的な枠組
  - 尤度関数とは？
    - データを X，パラメータを Θ とすると，尤度関数は $p(X|\Theta)$ のこと
    - 「データ X の生成源として，パラメータ Θ の確率モデルがどの程度尤もらしいか」を意味した規準
  - 最尤推定
    - 最も尤もらしい、データの生成源を推定すること
  - クラスタリング問題の例では・・・



本日の話題

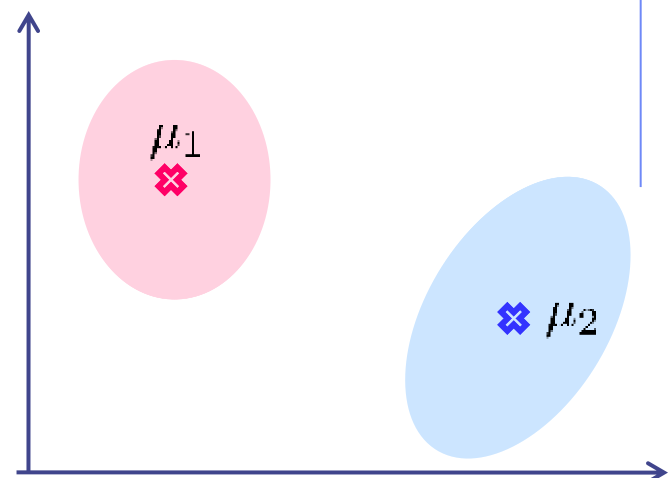
- 確率モデル(生成モデル)による
  パターン認識(クラスタリング)問題の定式化
  - k-meansクラスタリング
  - k-meansクラスタリングの生成モデルとしての解釈
  - 最尤推定
  - 混合正規分布モデル (Gaussian Mixture Model; GMM)
  - EMアルゴリズム
    - 補助関数とJensen不等式
  - EMアルゴリズムによるGMMパラメータの最尤推定とk-meansアルゴリズムの関係

本日の話題

- 確率モデル（生成モデル）による
  パターン認識（クラスタリング）問題の定式化
  - k-meansクラスタリング
  - k-meansクラスタリングの生成モデルとしての解釈
  - 最尤推定
  - 混合正規分布モデル (Gaussian Mixture Model; GMM)
  - EMアルゴリズム
    - 補助関数とJensen不等式
  - EMアルゴリズムによるGMMパラメータの最尤推定とk-meansアルゴリズムの関係

混合正規分布モデル (Gaussian Mixture Model; GMM)

- 混合正規分布モデルによるデータの生成プロセス
  - K個の正規分布をランダムに生成
  - サンプルごとに
    - 正規分布のクラス番号をランダムに選択
    - 選択されたクラス番号の正規分布に従ってサンプル値を生成
  - 生成された全サンプルが観測データ



- 生成モデル

for $k = 1, \ldots, K$

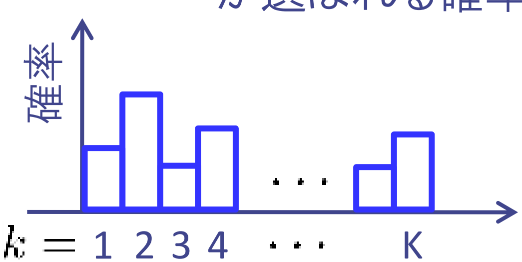
$$\{\mu_k, \sigma_k, \pi_k\} \sim H$$

for $n = 1, \ldots, N$

$$z_n \sim \mathrm{Categorical}(\pi_1, \ldots, \pi_K)$$

$$x_n | z_n \sim \mathcal{N}(\mu_{z_n}, \Sigma_{z_n})$$

π_k：k番目の正規分布が選ばれる確率



本日の話題

- 確率モデル(生成モデル)による
  パターン認識(クラスタリング)問題の定式化
  - k-meansクラスタリング
  - k-meansクラスタリングの生成モデルとしての解釈
  - 最尤推定
  - 混合正規分布モデル (Gaussian Mixture Model; GMM)
  - EMアルゴリズム
    - 補助関数とJensen不等式
  - EMアルゴリズムによるGMMパラメータの最尤推定とk-meansアルゴリズムの関係

本日の話題

- 確率モデル（生成モデル）による
  パターン認識（クラスタリング）問題の定式化
  - k-meansクラスタリング
  - k-meansクラスタリングの生成モデルとしての解釈
  - 最尤推定
  - 混合正規分布モデル (Gaussian Mixture Model; GMM)
  - EMアルゴリズム
    - 補助関数とJensen不等式
  - EMアルゴリズムによるGMMパラメータの最尤推定とk-meansアルゴリズムの関係

EMアルゴリズム

- GMMパラメータの最尤推定
  - GMMのパラメータ：$\Theta = \{\mu_k, \sigma_k, \pi_k\}_{k=1,\dots,K}$
  - 求めたいのは $\hat{\Theta}_{\mathrm{ML}} = \underset{\Theta}{\operatorname{argmax}}\, p(X|\Theta) = \underset{\Theta}{\operatorname{argmax}} \log p(X|\Theta)$

対数をとっても最大化
の目標は変わらない

- 尤度関数の導出

生成
モデル

$$\left\{\begin{aligned} p(Z|\Theta) &= \prod_n p(z_n|\Theta) = \prod_n \pi_{z_n} \\ P(X|Z,\Theta) &= \prod_n p(x_n|z_n,\Theta) = \prod_n \mathcal{N}(x_n;\mu_{z_n},\Sigma_{z_n}) \end{aligned}\right.$$

$$\mathcal{N}(x_n;\mu_k,\Sigma_k) \equiv \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^J|\Sigma_k|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_n-\mu_k)^\mathsf{T}\Sigma_k^{-1}(x_n-\mu_k)\right\}$$

$$\begin{aligned} p(X|\Theta) &= \sum_Z p(X|Z,\Theta)p(Z|\Theta) = \prod_n \sum_{z_n=1}^{K} p(x_n|z_n,\Theta)p(z_n|\Theta) \\ &= \prod_n \sum_{z_n=1}^{K} \pi_{z_n}\mathcal{N}(x_n;\mu_{z_n},\Sigma_{z_n}) \end{aligned}$$

EMアルゴリズム

- $p(X|\Theta) = \prod_n \sum_{z_n=1}^{K} \pi_{z_n} \mathcal{N}(x_n; \mu_{z_n}, \Sigma_{z_n})$ を最大化する Θ を求めたい
  - しかし解析的には求められない！
  - ちなみに，Z が既知であれば(各データにクラスラベルが付与されていれば)，各正規分布パラメータの最尤推定は解析的に求められる
⇒平均，分散，データの各クラスへの帰属率を求めるだけ
  - 解析的な求解を困難にしているのは

$$\log p(X|\Theta) = \sum_n \log \sum_{z_n=1}^{K} \pi_{z_n} \mathcal{N}(x_n; \mu_{z_n}, \Sigma_{z_n})$$

におけるlogの中のsummation

Z のように
尤度関数に姿を現さない
変数のことを「潜在変数」
または「隠れ変数」という

補助関数法

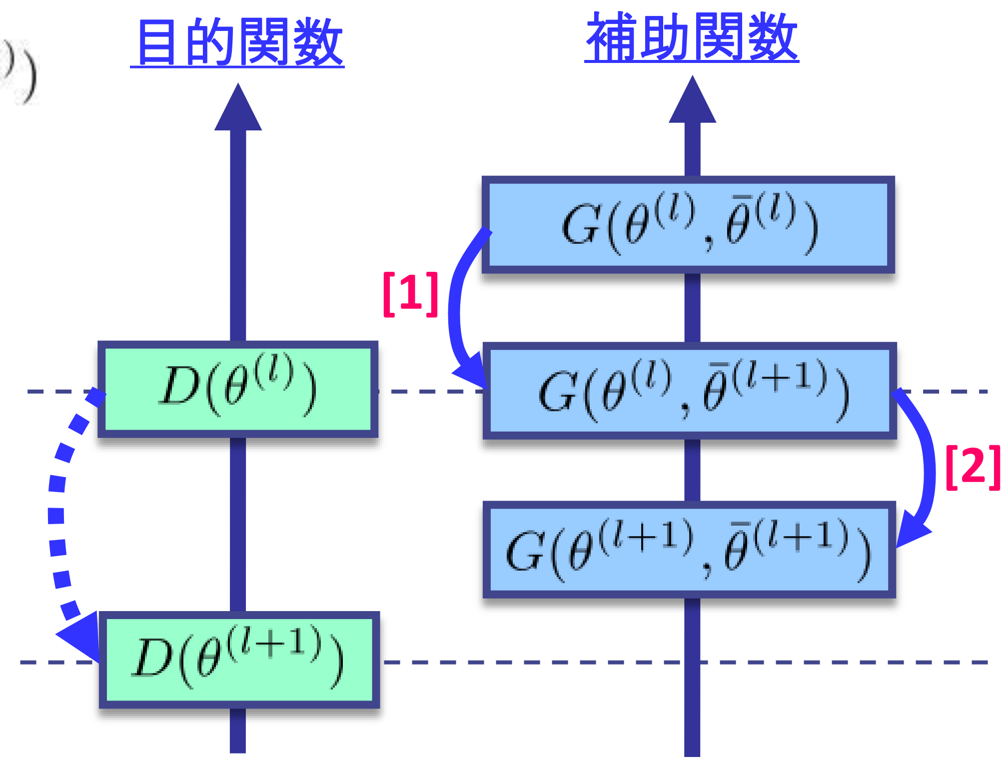
- 補助関数法
  - 目的関数 $D(\theta)$ を局所最小化するためのテクニック
  - $D(\theta) = \min_{\bar{\theta}} G(\theta, \bar{\theta})$ を満たす $G(\theta, \bar{\theta})$ を補助関数と定義
  - 反復アルゴリズム

[1] $\bar{\theta}^{(l+1)} = \underset{\bar{\theta}}{\operatorname{argmin}}\, G(\theta^{(l)}, \bar{\theta})$

[2] $\theta^{(l+1)} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}}\, G(\theta, \bar{\theta}^{(l+1)})$

  - 収束性

$$
\begin{aligned}
D(\theta^{(l)}) &= G(\theta^{(l)}, \bar{\theta}^{(l+1)}) \\
&\geq G(\theta^{(l+1)}, \bar{\theta}^{(l+1)}) \\
&\geq D(\theta^{(l+1)})
\end{aligned}
$$



Jensenの不等式

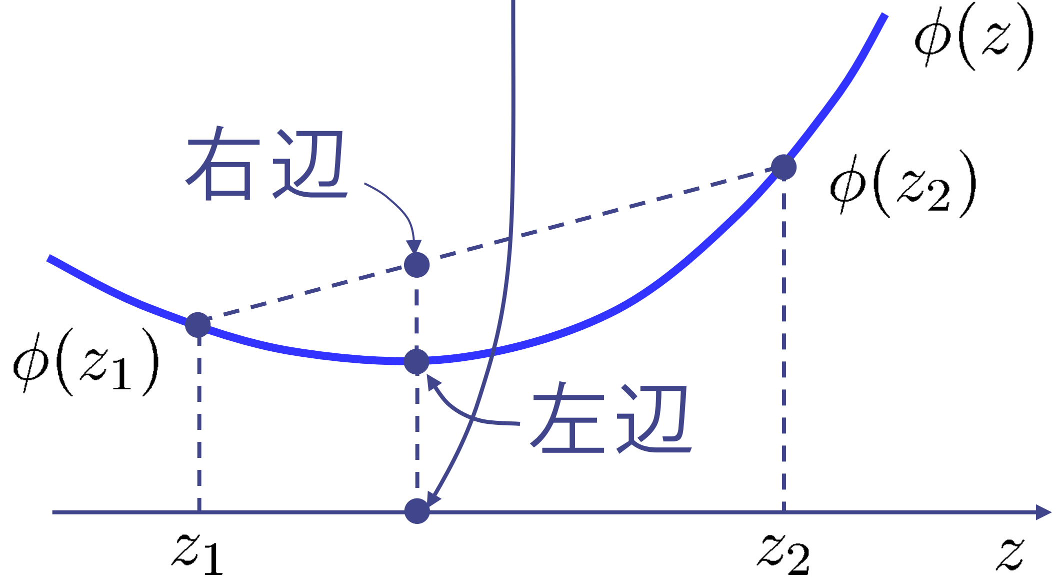
- Jensenの不等式
  - $\phi(\cdot)$：凸関数
  - $\lambda_i \geq 0, \ \sum_i \lambda_i = 1$

$$\phi\left(\sum_i \lambda_i z_i\right) \leq \sum_i \lambda_i \phi(z_i)$$

例えば,

$\phi(z) = -\log z$ の場合：

$$-\log\left(\sum_i \lambda_i z_i\right) \leq -\sum_i \lambda_i \log z_i$$



EMアルゴリズム

- 対数尤度 $\log p(X|\Theta) = \sum_n \log \sum_{k=1}^{K} \pi_k \mathcal{N}(x_n; \mu_k, \Sigma_k)$ の下限関数

$$
\begin{aligned}
&\log \sum_{k=1}^{K} \pi_k \mathcal{N}(x_n; \mu_k, \Sigma_k) \\
&= \log \sum_{k=1}^{K} \lambda_{k,n} \frac{\pi_k \mathcal{N}(x_n; \mu_k, \Sigma_k)}{\lambda_{k,n}} \\
&\geq \sum_{k=1}^{K} \lambda_{k,n} \log \frac{\pi_k \mathcal{N}(x_n; \mu_k, \Sigma_k)}{\lambda_{k,n}}
\end{aligned}
$$

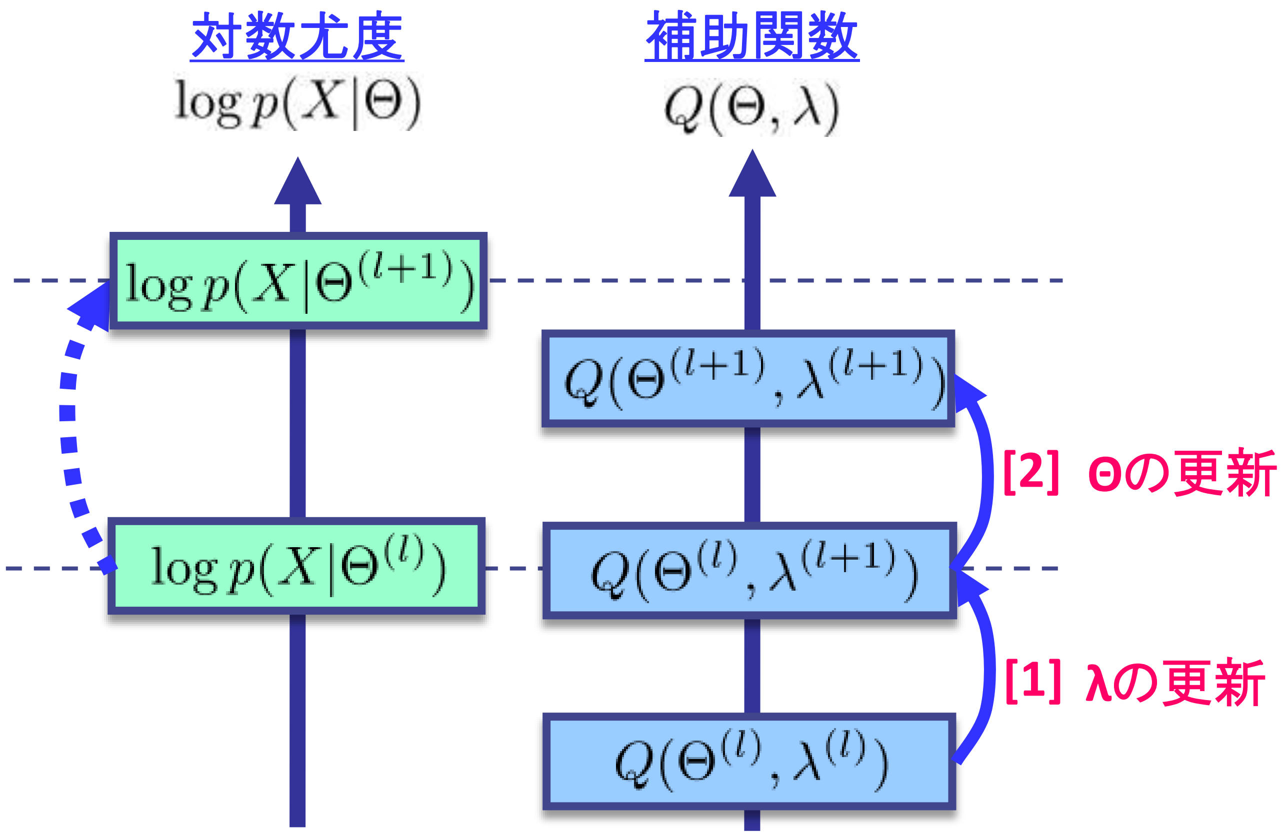
対数関数が凹関数であることに
注意してJensenの不等式を適用

$Q(\Theta, \lambda) \equiv \sum_n \sum_{k=1}^{K} \lambda_{k,n} \log \frac{\pi_k \mathcal{N}(x_n; \mu_k, \Sigma_k)}{\lambda_{k,n}}$ は $\log p(X|\Theta)$ の

補助関数！

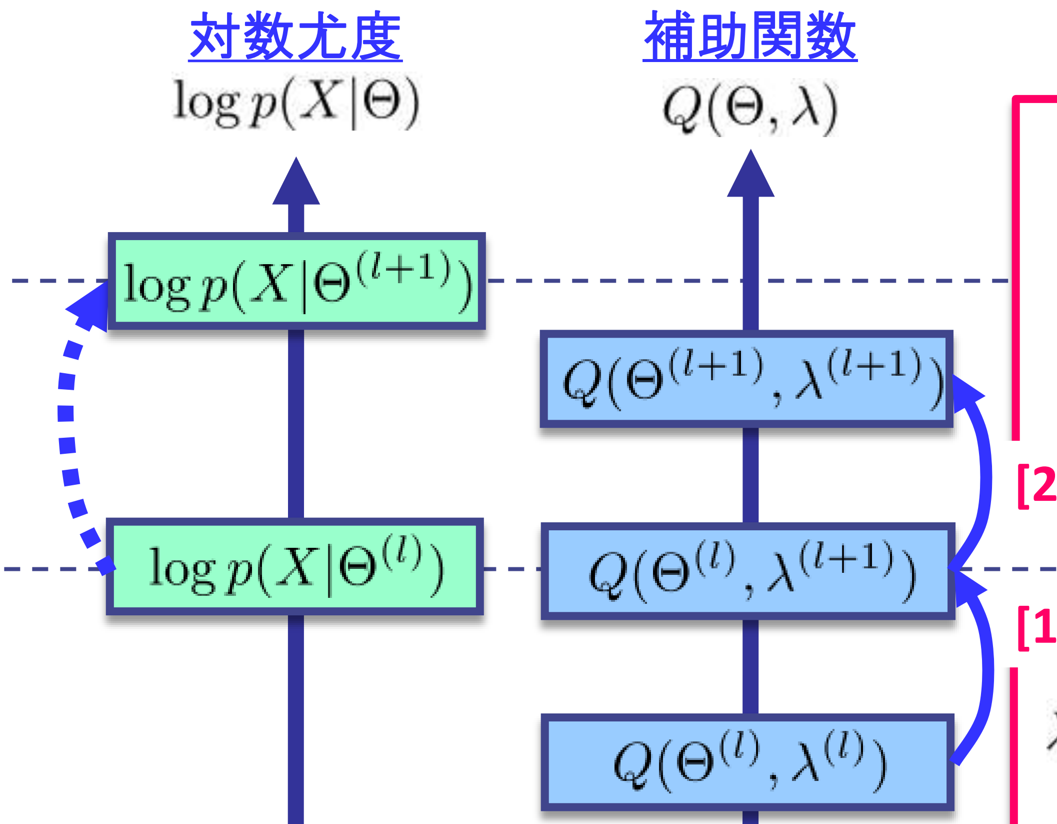
EMアルゴリズム

- 対数尤度と補助関数の関係：$\min_{\lambda} Q(\Theta, \lambda) = \log p(X|\Theta)$
- 反復アルゴリズムによる局所最大化



EMアルゴリズム

- 対数尤度と補助関数の関係： $\min_{\lambda} Q(\Theta,\lambda) = \log p(X|\Theta)$
- 反復アルゴリズムによる局所最大化



[2] Θの更新

$$\Theta^{(l+1)} = \operatorname*{argmax}_{\Theta} Q(\Theta, \lambda^{(l+1)})$$

$$\mu_k^{(l+1)} = \frac{\sum_n \lambda_{k,n}^{(l+1)} x_{k,n}}{\sum_n \lambda_{k,n}^{(l+1)}} \quad \cdots$$

[1] λの更新

$$\lambda^{(l+1)} = \operatorname*{argmax}_{\lambda} Q(\Theta^{(l)}, \lambda)$$

$$\lambda_{k,n}^{(l+1)} = \frac{\pi_k \mathcal{N}(x_n; \mu_k^{(l)}, \Sigma_k^{(l)})}{\sum_m \pi_m \mathcal{N}(x_n; \mu_m^{(l)}, \Sigma_m^{(l)})}$$

なぜEMアルゴリズムと呼ばれるか

■λの更新式

$$
\begin{aligned}
\lambda_{k,n}^{(l+1)} &= \frac{\pi_k \mathcal{N}(x_n; \mu_k^{(l)}, \Sigma_k^{(l)})}{\sum_m \pi_m \mathcal{N}(x_n; \mu_m^{(l)}, \Sigma_m^{(l)})} \\
&= \frac{p(x_n|z_n = k, \Theta)p(z_n = k|\Theta)}{\sum_m p(x_n|z_n = m, \Theta)p(z_n = m|\Theta)} \\
&= \frac{p(x_n|z_n = k, \Theta)p(z_n = k|\Theta)}{p(x_n|\Theta)} \\
&= p(z_n = m|x_n, \Theta)
\end{aligned}
$$

データ x_n がクラス m の正規分布から
生成された（事後）確率

■補助関数

$$
p(\underbrace{x_n, z_n = k}_{\text{観測データと潜在変数のペア}}|\Theta)
$$

観測データと潜在変数のペア
⇒「完全データ」と呼ぶ

$$
Q(\Theta, \lambda) \equiv \sum_n \sum_{k=1}^{K} \lambda_{k,n} \log \frac{\pi_k \mathcal{N}(x_n; \mu_k, \Sigma_k)}{\lambda_{k,n}}
$$

よって、$Q(\Theta, \lambda)$ は「完全データに対する対数尤度」の期待値に相当

本日の話題

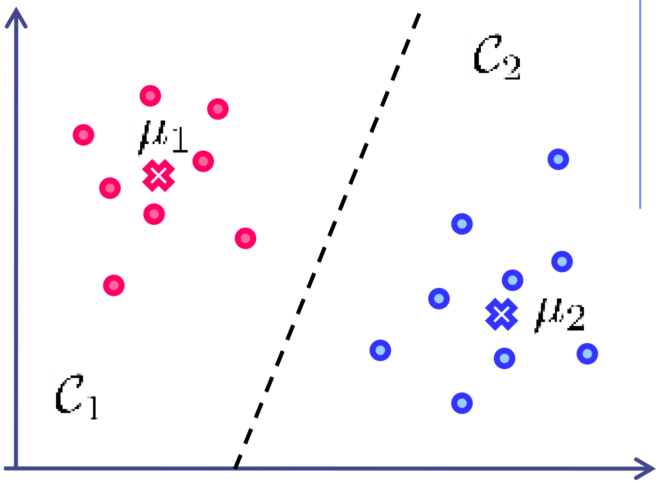
- 確率モデル（生成モデル）による
  パターン認識（クラスタリング）問題の定式化
  - k-meansクラスタリング
  - k-meansクラスタリングの生成モデルとしての解釈
  - 最尤推定
  - 混合正規分布モデル (Gaussian Mixture Model; GMM)
  - EMアルゴリズム
    - 補助関数とJensen不等式
  - EMアルゴリズムによるGMMパラメータの最尤推定とk-meansアルゴリズムの関係

本日の話題

- 確率モデル（生成モデル）による
  パターン認識（クラスタリング）問題の定式化
  - k-meansクラスタリング
  - k-meansクラスタリングの生成モデルとしての解釈
  - 最尤推定
  - 混合正規分布モデル (Gaussian Mixture Model; GMM)
  - EMアルゴリズム
    - 補助関数とJensen不等式
  - EMアルゴリズムによるGMMパラメータの最尤推定とk-meansアルゴリズムの関係

k-meansクラスタリングとの関係

- k-meansアルゴリズム
  - (Step 1) $z_n \leftarrow \underset{j}{\mathrm{argmin}} \|x_n - \mu_j\|_2^2$
  - (Step 2) $\mu_j \leftarrow \dfrac{\sum_n \mathbf{1}[z_n = j]x_n}{\sum_n \mathbf{1}[z_n = j]}$



- EMアルゴリズムによる GMMパラメータの最尤推定
  - (E-Step) $\lambda_{k,n} \leftarrow \dfrac{\pi_k \mathcal{N}(x_n; \mu_k, \Sigma_k)}{\sum_m \pi_m \mathcal{N}(x_n; \mu_m, \Sigma_m)}$
  - (M-step) $\mu_k \leftarrow \dfrac{\sum_n \lambda_{k,n} x_{k,n}}{\sum_n \lambda_{k,n}} \quad \cdots$

- 後者が前者と等価となる条件: $\Sigma_k \rightarrow 0$
  - Eステップにおけるデータのクラス分けが排他的になる

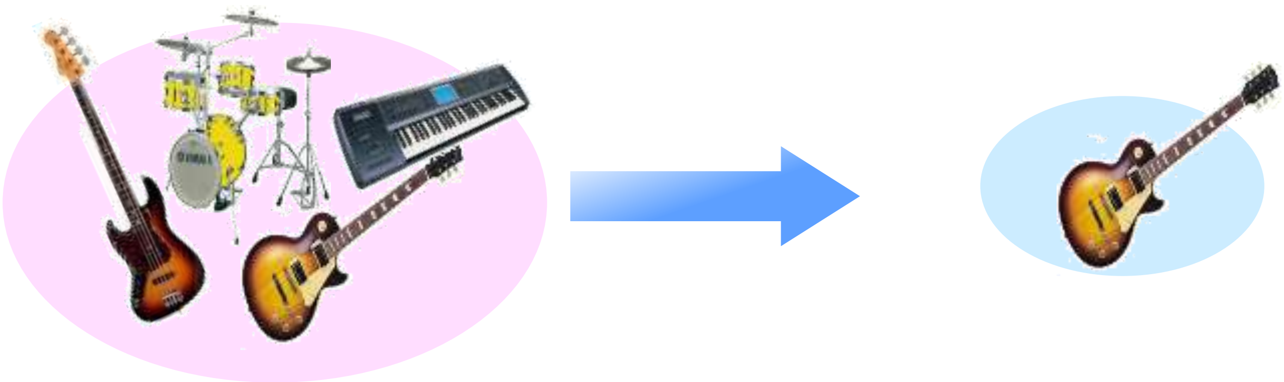
ここまでの講義内容のまとめ

- 確率モデル（生成モデル）による
  パターン認識（クラスタリング）問題の定式化
  - k-meansクラスタリング
  - k-meansクラスタリングの生成モデルとしての解釈
  - 最尤推定
  - 混合正規分布モデル (Gaussian Mixture Model; GMM)
  - EMアルゴリズム
    - 補助関数とJensen不等式
  - EMアルゴリズムによるGMMパラメータの最尤推定とk-meansアルゴリズムの関係

応用例
空間クラスタリングによる音響信号分離

研究背景：音源分離問題

- 複数音源が混在する信号から単一音源信号を取り出す。



- 応用例：オーディオリミックス、自動採譜 [Smaragdis, et al., 2003]
- 本研究の対象信号：ステレオ（=2入力）楽曲（音源数 > 2 ）

⇒劣決定問題

- 劣決定問題を解く従来技術例
  - 方位クラスタリング [Yilmaz, 2004], [Araki, 2007]
  - マルチチャネル非負値行列因子分解 (NMF) [Sawada, et al., 2013]
  - ハイブリッド法（方位クラスタリング + NMF） [Kitamura, Saruwatari et al., 2013]

ハイブリッド法の問題点及び研究目的

- 空間・時間・周波数で表される確率的信号モデルを、「空間」及び「時間周波数」領域における2つの個別モデルに分けた手法。

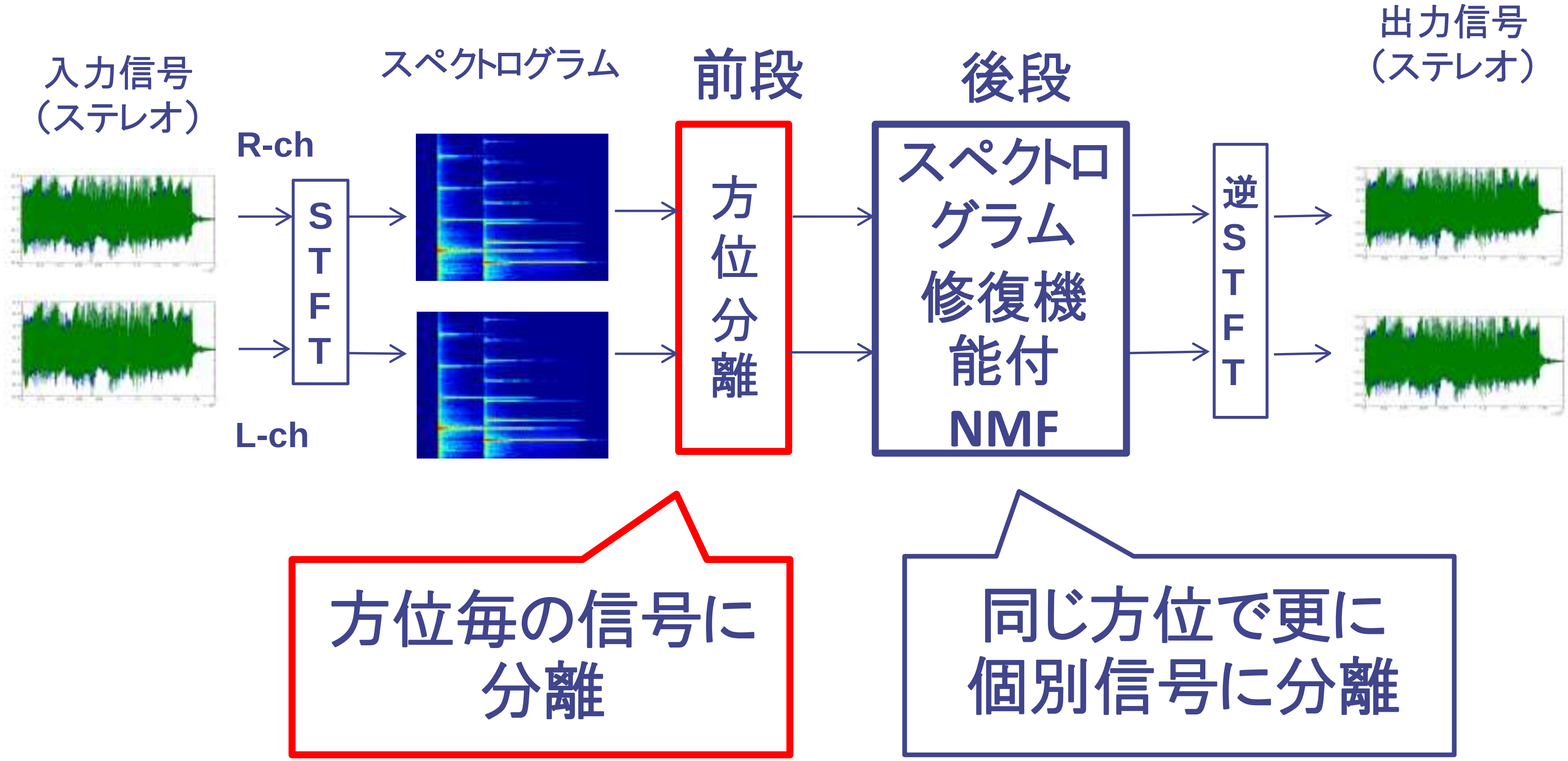
$$p(\text{空間}, \text{時間}, \text{周波数}) \approx p(\text{空間}) \cdot p(\text{時間}, \text{周波数})$$

k-means法による方位クラスタリング

教師有りNMFによる低ランク近似

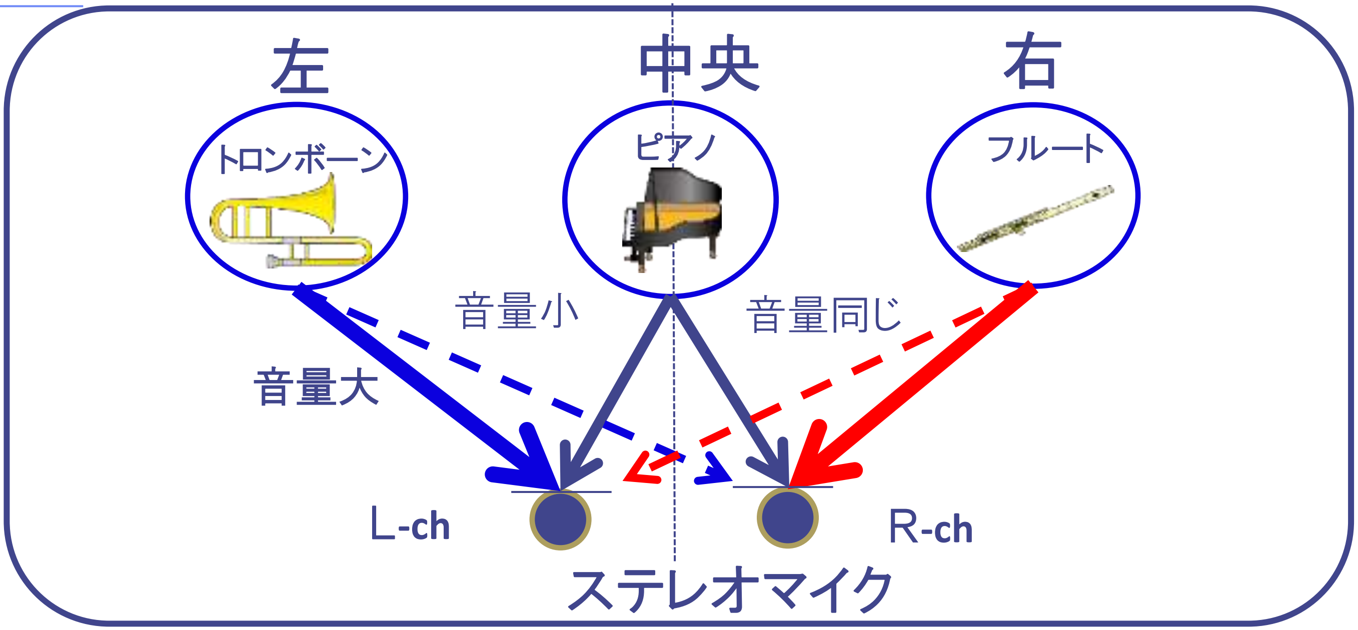
- 問題点
  - 従来方位クラスタリングが真の分布を表現しているか。
  - 方位クラスタリングの性能向上が最終出力に貢献するか。
- 本研究では、方位クラスタリングに関する一般化を行い、上記問題に関して議論する。

従来技術:ハイブリッド法の概要

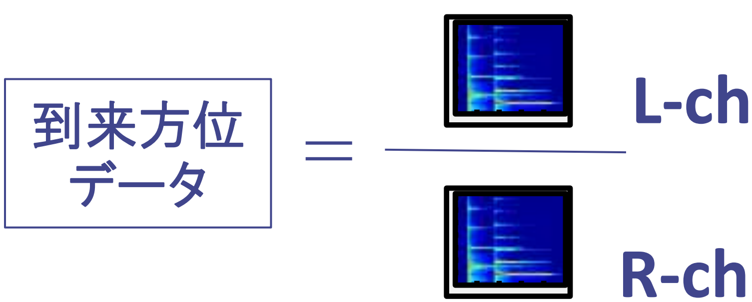


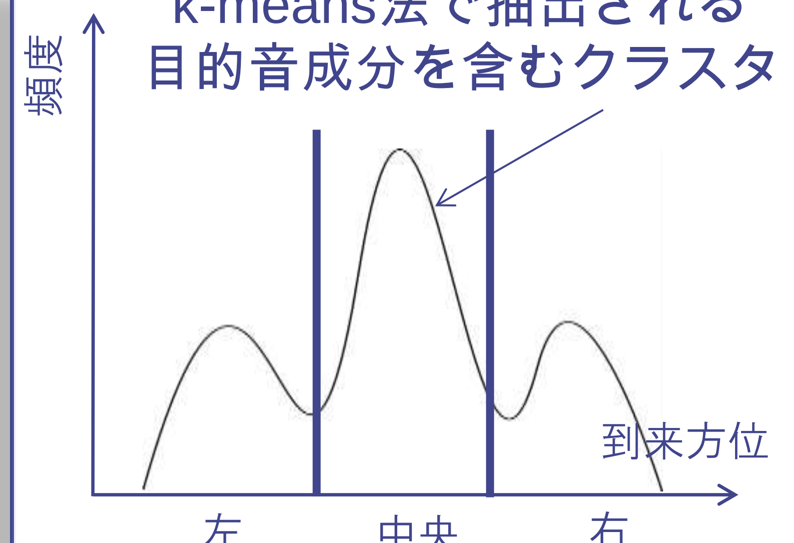
本研究で一般化する部分

従来技術：方位クラスタリング [Yilmaz, 2004]



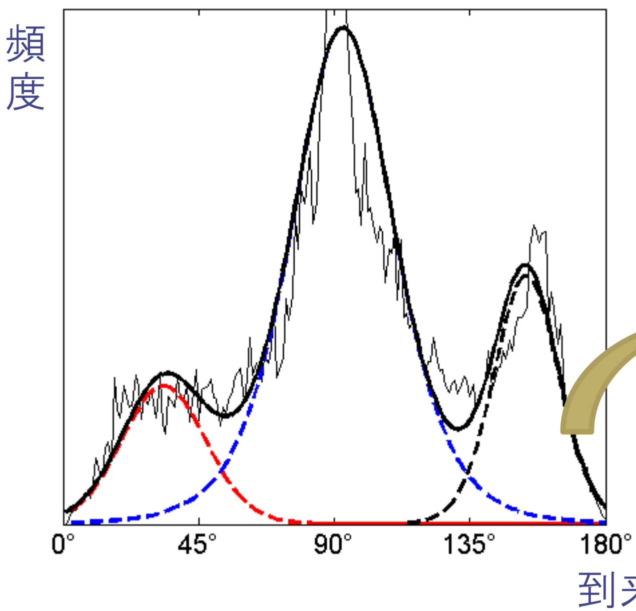
スペクトログラムの時間周波数要素毎に振幅比をとり、音の到来方位データを得る。





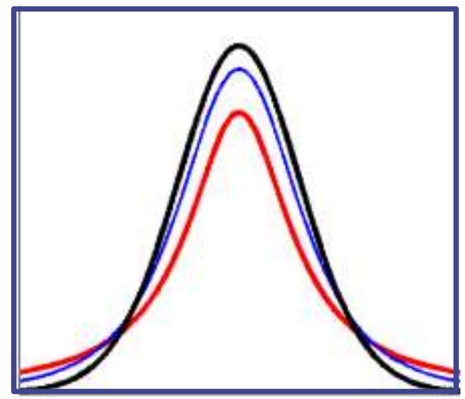
提案法：混合分布モデル

■混合分布モデルを最尤推定し、データクラスタを構成。



本研究では

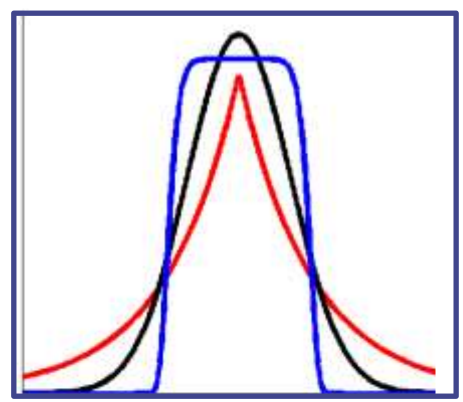
t分布：形状パラメータν



コーシー分布
↓
ガウス分布

ν
1
↓
∞

一般化ガウス分布：形状パラメータβ



ラプラス分布
↓
ガウス分布
↓
一様分布

β
1
↓
2
↓
∞

従来用いられた分布：
・混合ガウス分布 [Araki, 2007]
・混合コーシー分布 [前田, 2012]

我々は従来の分布を包括するより一般化された分布を導入した。

提案法：混合一般化ガウス分布の最尤推定(1)

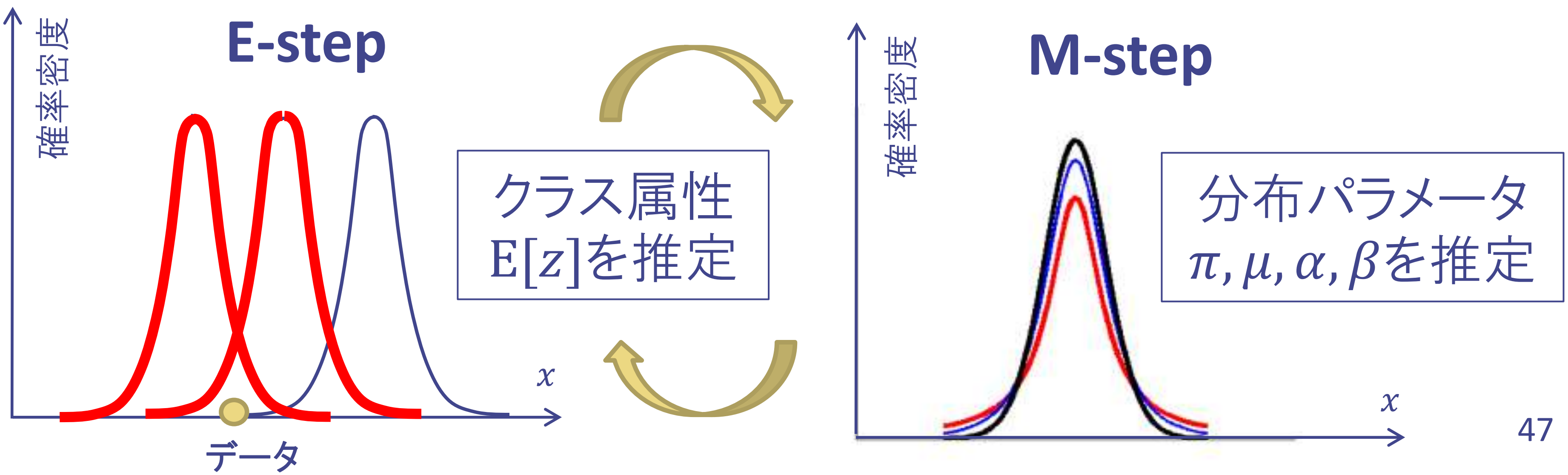
- 混合一般化ガウス分布(GGMM)(平均μ、スケールα、クラス数K)

到来方位データ　　形状パラメータ

$$f_{\mathrm{GGMM}}(x)=\sum_{k=1}^{K}\pi_k\underbrace{\frac{\beta_k}{2\alpha_k\Gamma(1/\beta_k)}\exp\left\{-\left(\frac{|x-\mu_k|}{\alpha_k}\right)^{\beta_k}\right\}}_{k\text{番目の一般化ガウス分布の密度関数}}$$

π_kの重みで混合

- クラス属性を隠れ変数zとみなし、その期待値を用いて逐次的な尤度最大化を行う。(**EMアルゴリズム**)



提案法:混合一般化ガウス分布の最尤推定(2)

- データx_n $(n = 1, \cdots, N)$ がある時のzの期待値を含む尤度関数$Q(\Psi)$ (Ψはパラメータ集合)は以下で表される。

$$Q(\Psi) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} \mathrm{E}[Z_{nk}] \left(\log \pi_k + \log \left\{ \frac{\beta_k}{2\alpha_k \Gamma(\frac{1}{\beta_k})} \exp \left[-\left(\frac{|x_n - \mu_k|}{\alpha_k} \right)^{\beta_k} \right] \right\} \right)$$

- **Eステップ**

  E[z]を更新

$$\mathrm{E}[Z_{nk}] \leftarrow \frac{\pi_k f_{\mathrm{GGMM},k}(x_n)}{f_{\mathrm{GGMM}}(x_n)}$$

- **Mステップ**

  $Q(\Psi)$を最大化するπ, μ, α, βを求める。

閉形式で求まる:
$$\alpha_k \leftarrow \left(\frac{\beta_k \sum_{n=1}^{N} \mathrm{E}[Z_{nk}] |x_n - \mu_k|^{\beta_k}}{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{E}[Z_{nk}]} \right)^{1/\beta_k}, \quad \pi_k \leftarrow \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{E}[Z_{nk}]}{N}$$

閉形式で求まらない:
$$\beta_k \leftarrow \arg\max_{\beta_k} Q, \quad \mu_k \leftarrow \arg\max_{\mu_k} Q$$

閉形式で求まらない場合はNewton法などを用いて解く。

提案法：混合t分布の最尤推定

- 混合t分布（tMM）（平均μ、スケールα、クラス数K）

形状パラメータ

$$f_{t\mathrm{MM}}(x) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k \underbrace{\frac{\Gamma(\frac{\nu_k+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{\nu_k}\alpha} \left\{ 1 + \frac{1}{\nu_k}\left(\frac{x-\mu_k}{\alpha_k}\right)^2 \right\}^{-(\nu_k+1)/2}}_{k\text{番目の}t\text{分布の密度関数}}$$

混合重み

- EMアルゴリズムにより最尤推定（ν以外は閉形式で求まる）。
- 本研究では、νの推定に拡張されたスターリングの公式を用いて近似を行い、**閉形式の更新式を導出**した。

拡張スターリング公式：

$$\boxed{\Gamma(x) \simeq \sqrt{2\pi}\exp(-x)x^{x-0.5}\exp(1/12x)}$$

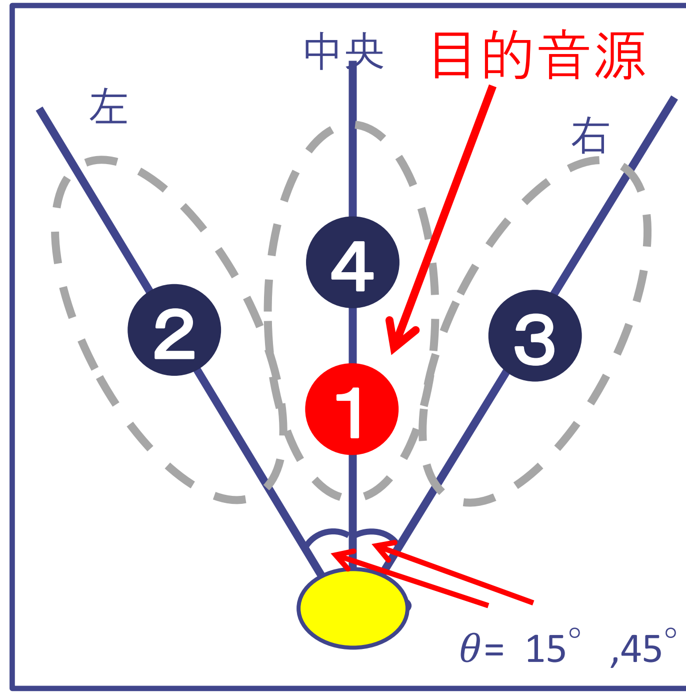
νの更新式：

$$\nu_k \leftarrow \frac{-3-\sqrt{9-12c_k}}{6c_k}$$

$$c_k = 1 + \frac{\sum_{n=1}^{N} E[Z_{nk}]\left(\log u_{nk} - u_{nk}\right)}{\sum_{n=1}^{N} E[Z_{nk}]} + \psi\left(\frac{\nu_k+1}{2}\right) - \log\left(\frac{\nu_k+1}{2}\right)$$

実験条件

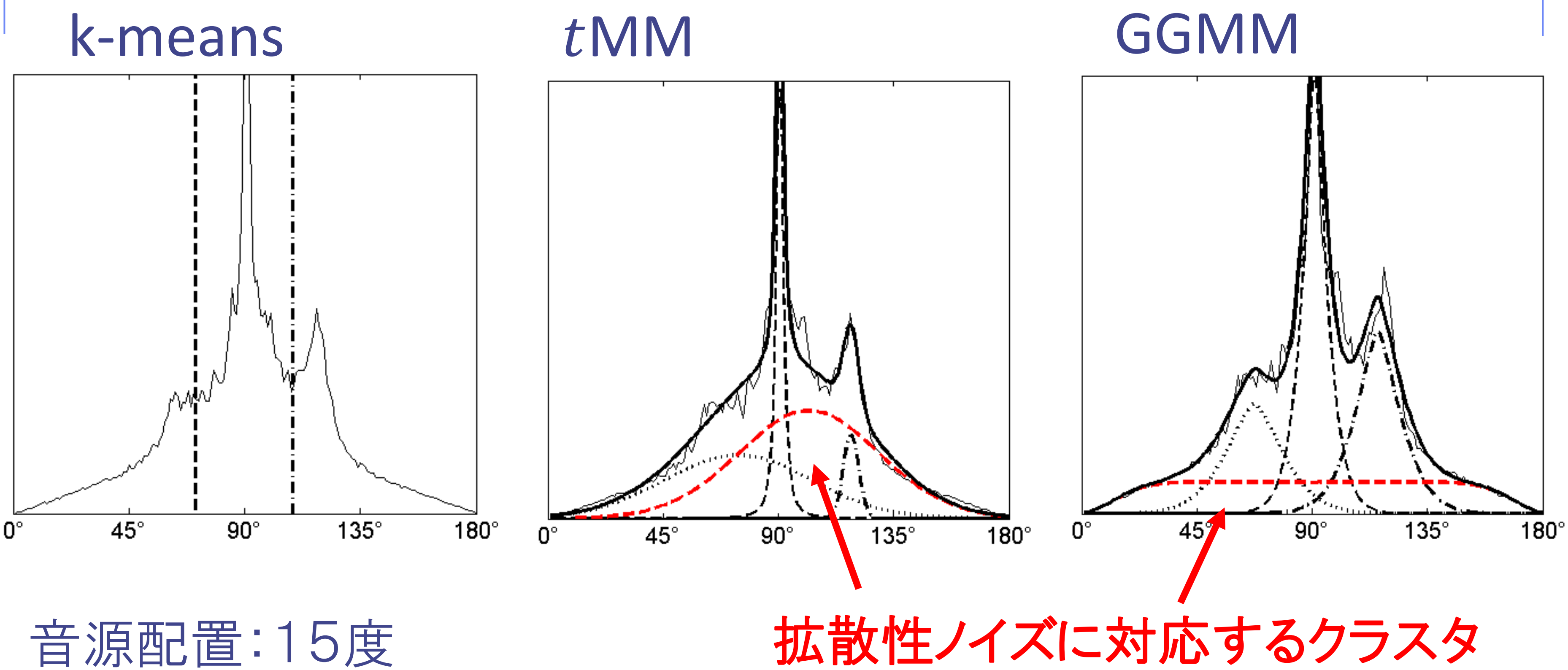
- 右図の配置で混合したMIDI音源のステレオ信号を作成。
- 拡散性ノイズを付加（SNR=0 dB）。
- 過剰なクラスタ数を設定。
- 客観評価には、総合的な分離性能を測るSDR (source-to-distortion ratio) [dB] を用いた。



$$\underset{\text{推定信号}}{\hat{s}(t)} = \underbrace{s_{\text{target}}(t)}_{\text{真の目的音}} + \underbrace{e_{\text{interf}}(t)}_{\text{妨害音}} + \underbrace{e_{\text{artif}}(t)}_{\text{人工歪み}}$$

$$\mathrm{SDR} = 10 \log_{10} \frac{\sum_t s_{\text{target}}(t)^2}{\sum_t \{e_{\text{interf}}(t) + e_{\text{artif}}(t)\}^2}$$

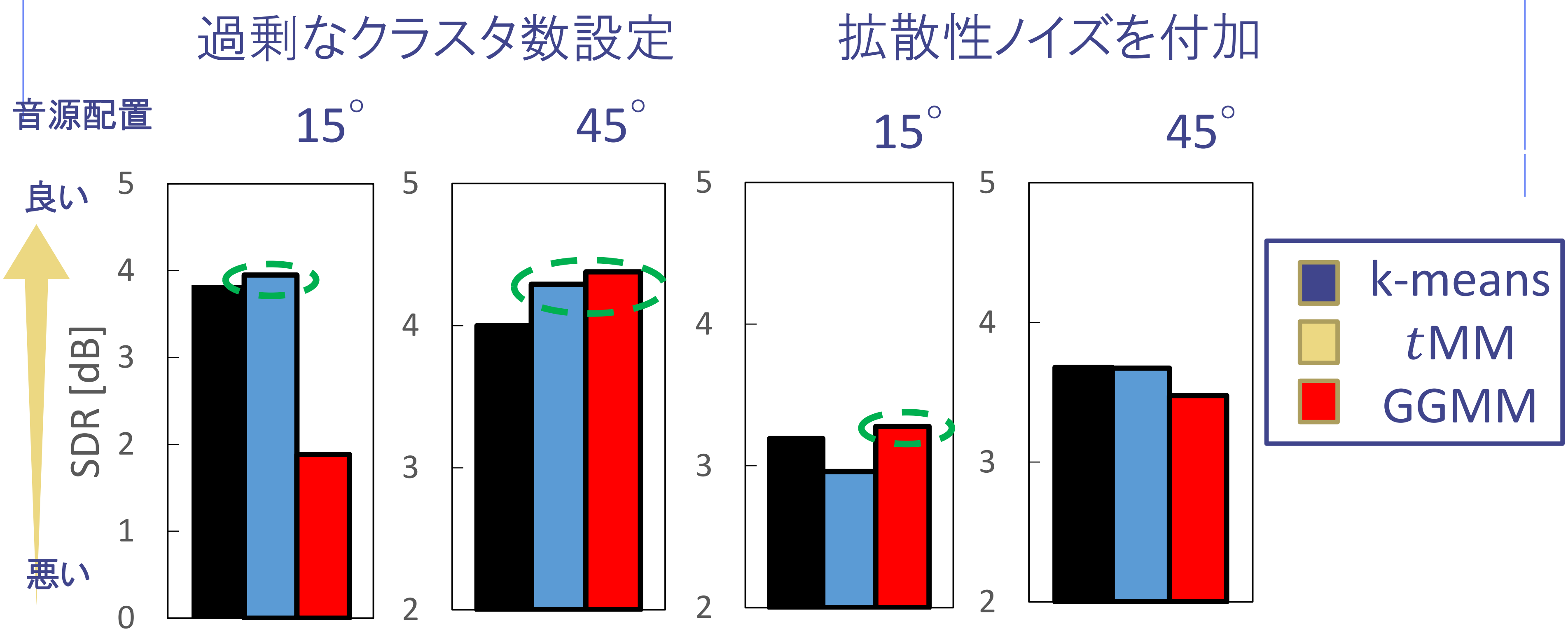
クラスタリング結果例(拡散性ノイズ付与)



音源配置:15度
SNR:0 dB

提案手法にて拡散性ノイズをモデル化でき、
拡散性ノイズに対する頑健性を示した。

実験結果（方位クラスタリング法の比較）

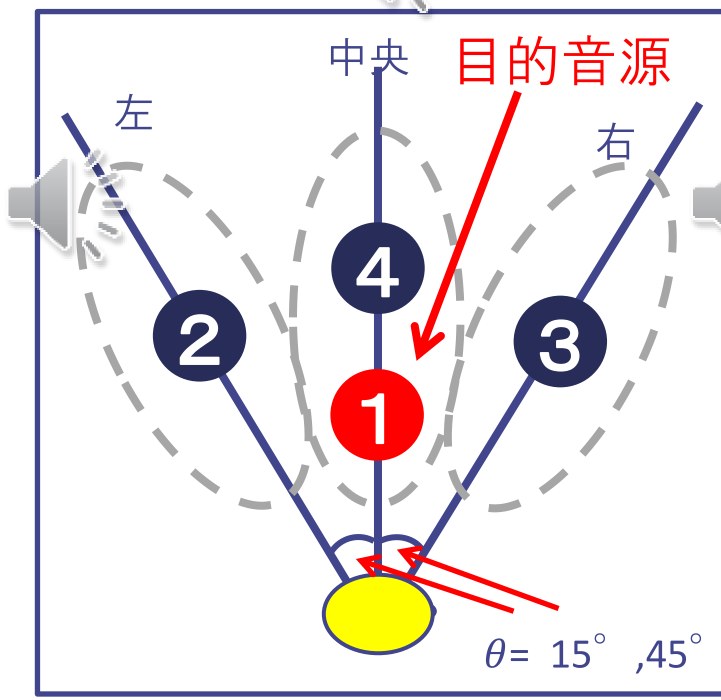


特定の条件下で、提案した混合分布によるクラスタリングが従来法より分離性能に関して上回ることが確認された。

サウンドデモ

・原音(混合音)

・クラスタリング音



・NMFとの連結後の分離音