信号処理論第二
第2回 (10/2)

情報理工学系研究科システム情報学専攻
猿渡 洋
hiroshi_saruwatari@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

信号処理論第二　講義予定(金曜2限)

- 9/25: 第1回
- 10/02: 第2回
- 10/09: 第3回
- 10/16: 第4回
- 10/23: 第5回
- 10/30: 第6回
- 11/06: 第7回
- 11/27: 第8回
- 12/04: 第9回
- 12/11: 第10回
- 12/18: 第11回
- 12/25: 第12回
- 1/08: 第13回
- 01/22: 期末試験(予定)

※2020年度は全て90分講義とする(10時25分〜11時55分)

講義内容

- δ関数再考
- δ関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

講義資料と成績評価

- 講義資料
  - システム1研HP　http://www.sp.ipc.i.u-tokyo.ac.jp/ からダウンロードできるようにしてあります
- 成績評価
  - 学期末試験

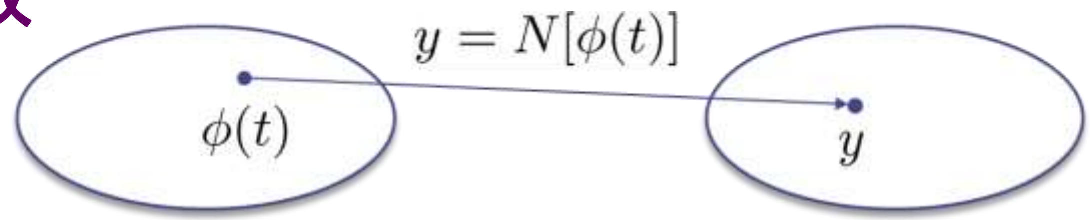
参考書

- 現代工学のためのデルタ関数δ(t)の発見から超関数へ
  篠崎寿夫・他　著、現代工学社
- ディジタル信号と超関数
  吉野邦生・荒井隆之　著、海文堂
- A. パポーリス, アナログとディジタルの信号解析, 町田, 村田訳, 現代工学社
- 片山 徹, 新版応用カルマンフィルタ, 朝倉書店

前回の復習

- 導入：Fourier変換の重要性
  - 線形時不変システムの固有関数は複素正弦波
  - 複素正弦波の重ね合わせとして信号を表現するFourier変換はシステム論において基本的
- しかし，いくつかの重要な関数（定数関数，正弦波・・・）は通常の関数の枠組みではFourier変換できない
  →超関数の導入
- 超関数
  - 汎関数の一種
  - 形式的積分表現による各種演算の導入
  - 一般関数の超関数の解釈→不連続な微分なども扱える

Schwartzの超関数



- 超関数 $g(t)$ とは，あるクラス C の任意の関数 $\phi(t)$ に対して定義される汎関数で，線形性と連続性を満たすもの
- 以下では超関数 $g(t)$ が $\phi(t)$ に対して割り当てられる値を $N_g[\phi(t)]$ と表記する
- 線形性：$N_g[a_1\phi_1(t) + a_2\phi_2(t)] = a_1 N_g[\phi_1(t)] + a_2 N_g[\phi_2(t)]$
- 連続性：$\phi_m(t) \Rightarrow 0$ ならば $N_g[\phi_m(t)] \to 0$
- 超関数 $g(t)$ はここでは形式的に $g(t)$ と表記しているが，一般に実数（または複素数） t に対して値を決める必要はないことに注意
- 形式的積分表示 $N_g[\phi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)dt$　$\phi(t)$：テスト関数

デルタ関数(Dirac’s distribution)

- 超関数による定義

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0)$$

  - テスト関数 $\phi(t)$ は，原点で連続であればよい

両者の違いを理解
しておくことが大切

誤ったデルタ関数の定義

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\underline{\delta(t) = 0 \quad (t \neq 0)}$$

一般化された極限としての超関数

- 普通の関数の一般化された極限として超関数を定義することができる。

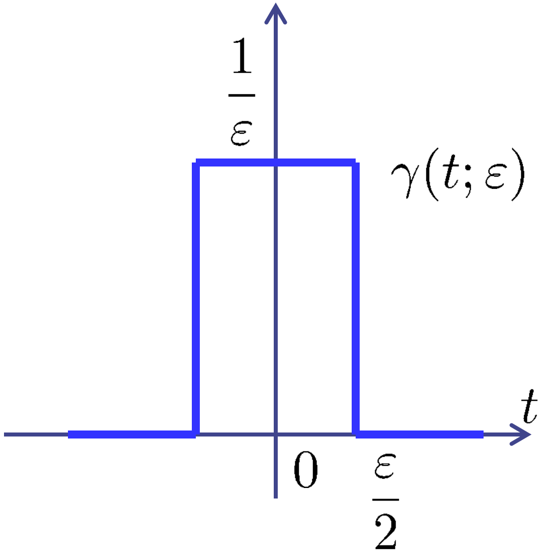
$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\phi(t)dt = \phi(0)$$

δ関数の例1

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \gamma(t;\varepsilon)$$

$$\gamma_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left[U(t+\frac{\varepsilon}{2}) - U(t-\frac{\varepsilon}{2})\right]$$

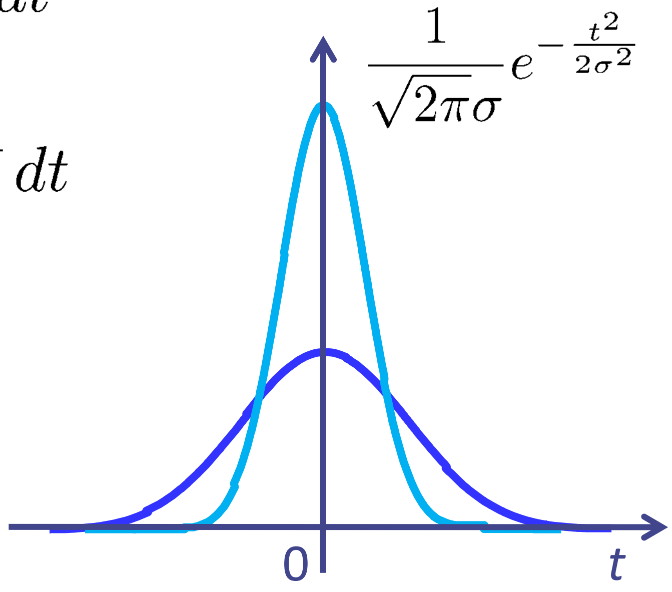


$$\begin{aligned} \because \quad & \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t;\varepsilon)\phi(t)dt \\ = \quad & \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \phi(t)dt \\ \simeq \quad & \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \phi(0)\varepsilon \\ = \quad & \phi(0) \end{aligned}$$

δ関数の例2

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

$$\begin{aligned}
\because \quad & \lim_{\sigma \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \phi(t) dt \\
\simeq \quad & \lim_{\sigma \to 0} \phi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \\
= \quad & \phi(0)
\end{aligned}$$



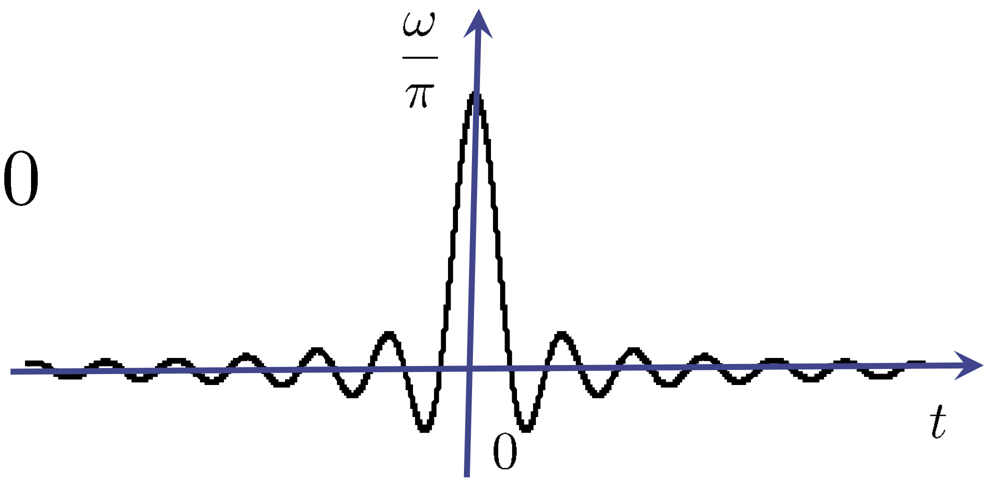
δ関数の例3

$$\delta(t) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t}$$

- いままでの例との違い

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) = 0 \quad t \neq 0$$

ではないことに注意。
つまり上式は、δ関数の
定義に必要な条件ではない。



$\delta(t) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t}$ の証明

$$\because \quad \lim_{\omega\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t} \phi(t) dt$$

$$= \quad \lim_{\omega\to\infty} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \underbrace{\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t} \phi(t) dt}_{=0} \right]$$

$$= \quad \lim_{\omega\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sin \omega t}{\pi t} \phi(t) dt$$

$$\simeq \quad \lim_{\omega\to\infty} \phi(0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sin \omega t}{\pi t} dt$$

$$= \quad \phi(0) \underbrace{\lim_{\omega\to\infty} \int_{-\varepsilon\omega}^{\varepsilon\omega} \frac{\sin x}{\pi x} dx}_{=1}$$

$$= \quad \phi(0)$$

$\frac{\phi(t)}{t}$ は区間 $(-\infty, \varepsilon)$ と (ε, ∞) において積分可能であるから，Riemann-Lebesgue の補助定理より $\omega \to \infty$ のとき 0 に収束

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

Riemann-Lebesgue（ルベーグ）の補助定理　補足

関数 $\phi(t)$ が、ある区間 (a,b) で
絶対可積分ならば

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_a^b e^{-j\omega t}\phi(t)dt = 0$$

ただし a,b は有限の定数、あるいは無限大である。

超関数の極限としては

$$\lim_{\omega\to\infty} e^{-j\omega t} = 0 \quad (t\neq 0)$$

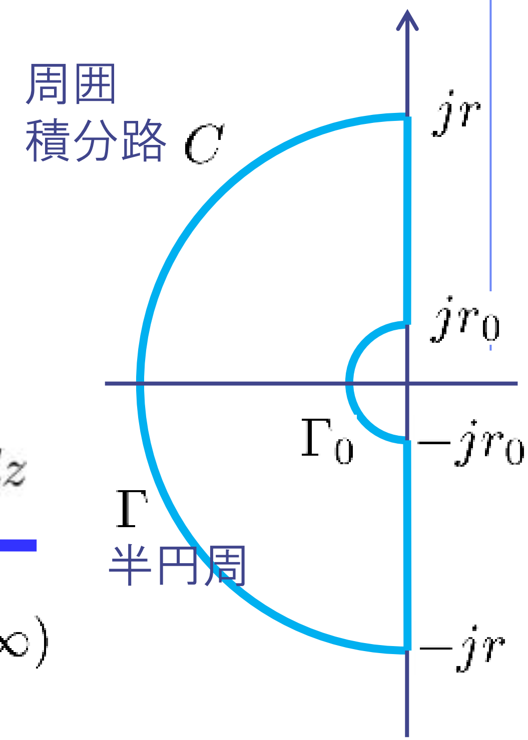
$$\lim_{\omega\to\infty} \cos\omega t = 0 \quad (t\neq 0)$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \sin\omega t = 0 \quad (t\neq 0)$$

Fourier核 $(\sin x)/x$ の積分

- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ の証明
  - $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z} dz$

$$= \int_{-r}^{-r_0} \frac{e^{jy}}{jy} j dy + \underbrace{\int_{\Gamma_0} \frac{e^z}{z} dz}_{\substack{\to -j\pi \\ (r_0 \to 0)}} + \int_{r_0}^{r} \frac{e^{jy}}{jy} j dy + \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z} dz}_{\substack{\to 0 \\ (r \to \infty)}}$$



$$\int_{\Gamma_0} \frac{e^z}{z} dz = -\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{r_0 \cos\theta + j r_0 \sin\theta}}{r_0 e^{j\theta}} \cdot j r_0 e^{j\theta} d\theta \quad \longleftarrow \quad z = r_0 e^{j\theta}$$

$$\to -j \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta$$

$$= -j(3\pi/2 - \pi/2)$$

$$= -j\pi$$

Fourier核 $(\sin x)/x$ の積分

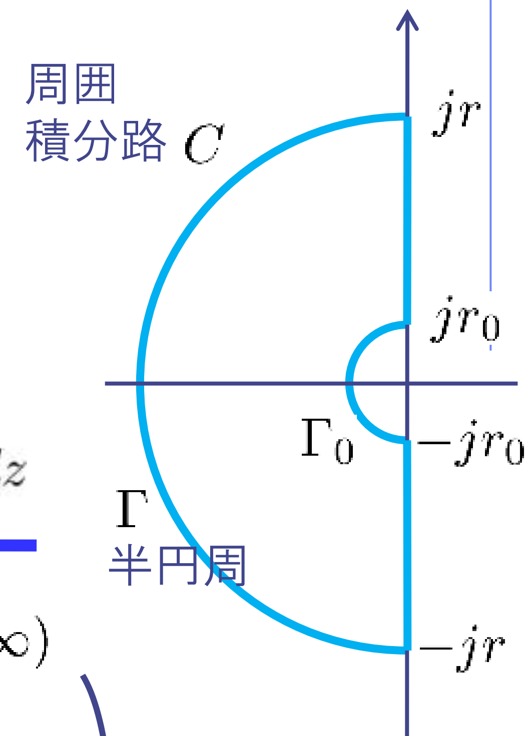
- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ の証明
  - $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z}dz$

$$= \int_{-r}^{-r_0} \frac{e^{jy}}{jy}jdy + \underbrace{\int_{\Gamma_0} \frac{e^z}{z}dz}_{\substack{\to -j\pi \\ (r_0 \to 0)}} + \int_{r_0}^{r} \frac{e^{jy}}{jy}jdy + \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z}dz}_{\substack{\to 0 \\ (r \to \infty)}}$$

$$\to \int_0^\infty \underline{\frac{e^{jy}-e^{-jy}}{y}}dy - j\pi \quad (r_0 \to 0 \ r \to \infty)$$

$$\sin y = \frac{e^{jy}-e^{-jy}}{2j}$$

$= 0$ （Cにおいて解析的のため）



Jordanの補助定理

$t > 0$ のとき

$$\int_\Gamma e^{tz} f(z)\mathrm{d}z \to 0 \quad (r \to \infty)$$

誤ったδ関数の定義

- よく用いられるδ関数の定義のいくつかは正しくない

定義1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\underline{\delta(t) = 0 \quad (t \neq 0)}$$

定義2

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)dt = 1$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0 \quad (t \neq 0)}$$

t=0で0となるようなテスト関数φ(t)に対する超関数の意味での等号

なぜか？

定義1の反例

- $\delta(t) + \delta'(t)$ も定義を満たすから
  - $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\phi(t)dt &= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi'(t)dt \\ &= -\phi'(0)\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0$$

$$\delta'(t) = 0 \quad (t \neq 0)$$

正しいδ関数の定義

- 以下を用いれば、δ関数は一意に定義できる

定義3

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0)$$

定義4

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\phi(t)dt = \phi(0)$$

第2章：
超関数を考慮したフーリエ変換

Fourier変換対

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\
f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega
\end{aligned}
$$

Fourier変換対の表記

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

Fourierスペクトル・エネルギースペクトル

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

$A(\omega)$:　Fourier スペクトル, 振幅スペクトル

$A^2(\omega)$:　エネルギースペクトル

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{R(\omega)^2 + X(\omega)^2} \\ \phi(\omega) &= \tan^{-1}\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \end{aligned}$$

逆変換の証明：*f (t)* が連続の場合

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
= \ & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega \\
= \ & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)}d\omega\right]f(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow \qquad \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}d\omega = \delta(t)}$$

（次ページにて）

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)f(\tau)d\tau = f(t)$$

複素指数関数の積分とδ関数の関係

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega t d\omega \\
&= \lim_{\Omega\to\infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} \cos\omega t d\omega \\
&= \lim_{\Omega\to\infty} \left[\frac{\sin\omega t}{t}\right]_{-\Omega}^{\Omega} \\
&= \lim_{\Omega\to\infty} \frac{2\sin\Omega t}{t} \\
&= \lim_{\Omega\to\infty} 2\pi\frac{\sin\Omega t}{\pi t} \\
&= 2\pi\delta(t)
\end{aligned}
$$

Fourier変換の実部と虚部

- $$f(t) = f_R(t) + j f_I(t)$$
  $$e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

- $$F(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$$

$$\begin{cases} R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_R(t)\cos\omega t + f_I(t)\sin\omega t\right] dt \\ I(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} \left[f_R(t)\sin\omega t - f_I(t)\cos\omega t\right] dt \end{cases}$$

- $f^*(t)$ のFourier変換： $F^*(-\omega)$

実関数のFourier変換

- $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(\cos\omega t - j\sin\omega t\big)dt$$

$$\begin{cases} R(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt \longrightarrow \text{偶関数} \quad \because R(-\omega) = R(\omega) \\ I(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt \longrightarrow \text{奇関数} \quad \because I(-\omega) = -I(\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(-\omega) = F^*(\omega)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \because F(-\omega) &= R(-\omega) + jI(-\omega) \\ &= R(\omega) - jI(\omega) \\ &= F^*(\omega) \end{aligned}}$$

実関数の偶関数／奇関数への分解

- $f(t) = f_E(t) + f_O(t)$
  - 偶関数成分　$f_E(t) = \dfrac{f(t) + f(-t)}{2}$
  - 奇関数成分　$f_O(t) = \dfrac{f(t) - f(-t)}{2}$

偶関数/奇関数とFourier変換の実部虚部の関係

- $f(t) \longleftrightarrow F(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$

$f_E(t) \longleftrightarrow R(\omega)$ 偶関数のFourier変換は実部のみ

$f_O(t) \longleftrightarrow jI(\omega)$ 奇関数のFourier変換は虚部のみ

$$\because \quad \begin{aligned} f(t) &\longleftrightarrow R(\omega) + jI(\omega) \\ f(-t) &\longleftrightarrow R(\omega) - jI(\omega) \end{aligned}$$

重畳積分の定義

- $$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) * f_2(t) \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

時間領域の重畳積分定理

- $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)$

  $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$

$$\boxed{f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega)}$$

重畳積分定理の証明

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau\right]dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f_2(t-\tau)dt\right]d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)e^{-j\omega\tau}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(t-\tau)} f_2(t-\tau)dt\right]d\tau \\
&= F_1(\omega)F_2(\omega)
\end{aligned}
$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_i(t)|^2 dt < \infty, i = 1, 2$$

ならば積分の順序が入れ替えられる

周波数領域の重畳積分定理

- $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)$

  $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$

$$\boxed{f_1(t) f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)}$$

Parsevalの定理

- $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)$

  $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(-\omega) F_2(\omega) d\omega}$$

- 特殊ケースとして・・・

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Parsevalの定理の証明

周波数領域での重畳定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy$$

両辺で $\omega = 0$ とおき、y を ω とかきかえると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(-\omega) d\omega$$

特に $f_2(t) = f_1^*(t)$ と選ぶと、$F_2(\omega) = F_1^*(-\omega)$ なので

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(\omega)|^2 d\omega$$

Fourier変換の対称性

- $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ $\Longleftrightarrow$ $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$
- 略証 $\because$

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi f(-\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} f(-\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
= & \int_{\infty}^{-\infty} f(\omega') e^{-j\omega' t} (-d\omega') \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega') e^{-j\omega' t} d\omega' \\
= & F(t)
\end{aligned}
$$

重要なFourier変換対と変換公式

- 重要なFourier変換対

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\frac{d^n\delta(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n$$

$$\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

符号関数

$$P_T(t) \leftrightarrow \frac{2\sin T\omega}{\omega}$$

-T〜Tの矩形関数

$$e^{-\alpha t^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

- 原点シフト

$$f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

- 重畳積分定理

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega)$$

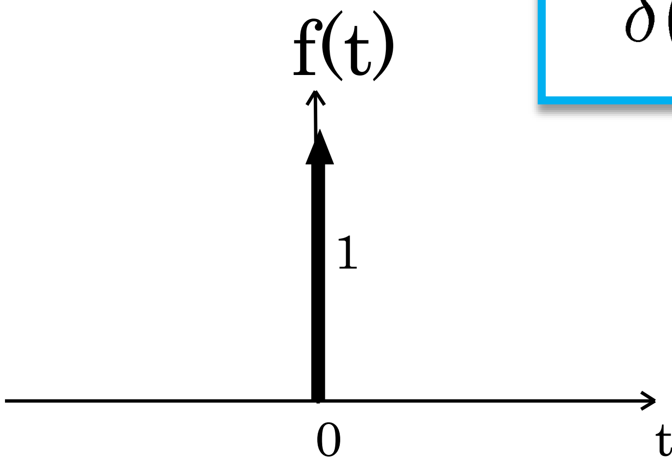
$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

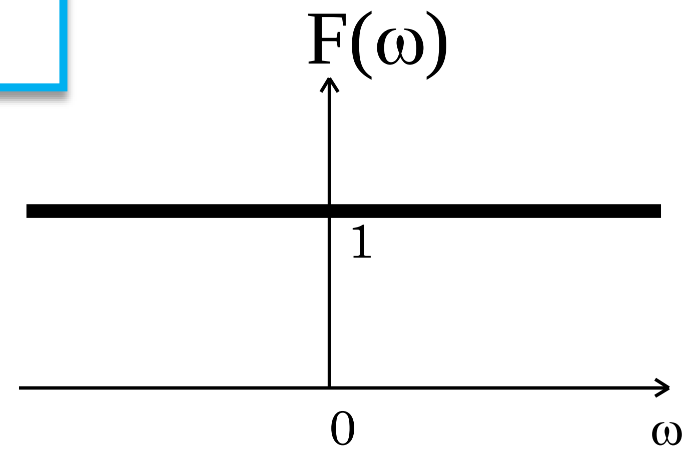
- 対称性

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

δ関数のFourier変換1

$$\boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1}$$

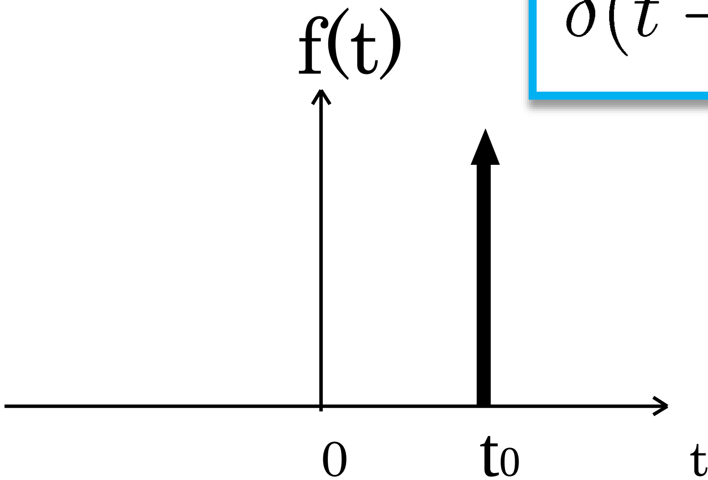


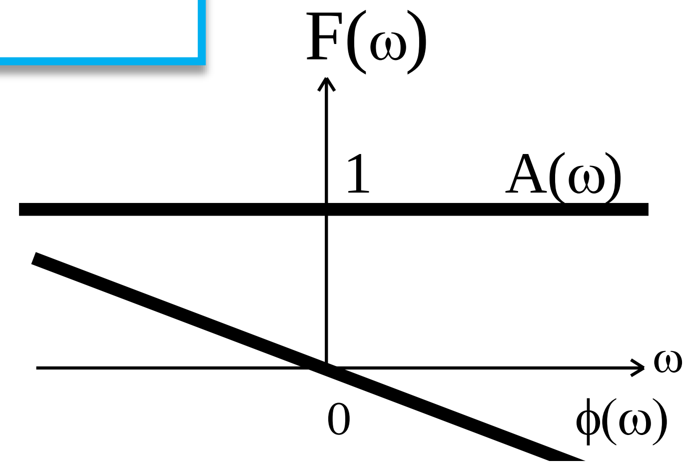


$$\begin{aligned} \because \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt &= 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega &= \delta(t) \end{aligned}$$

δ関数のFourier変換2

$$\boxed{\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}}$$

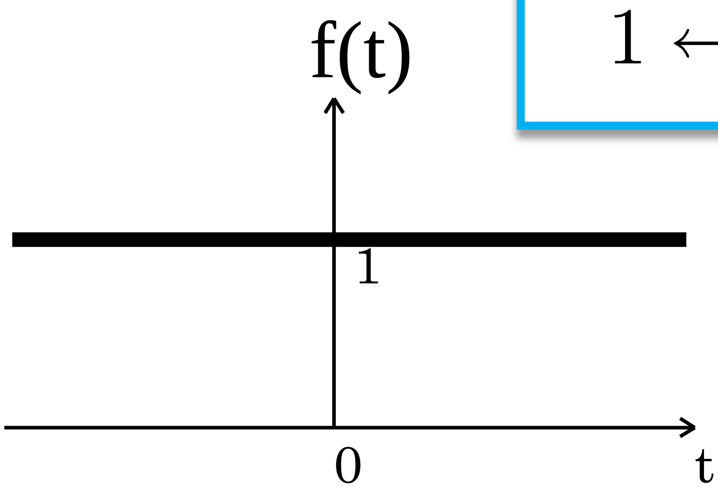


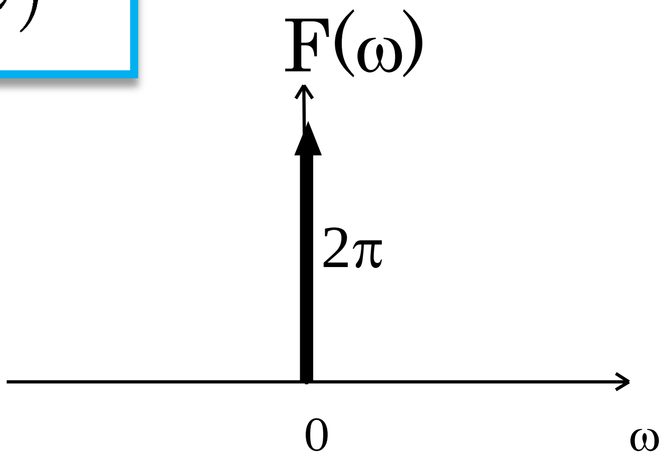


$\delta(t) \leftrightarrow 1$ の原点シフト

定数関数のFourier変換

$$\boxed{1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}$$





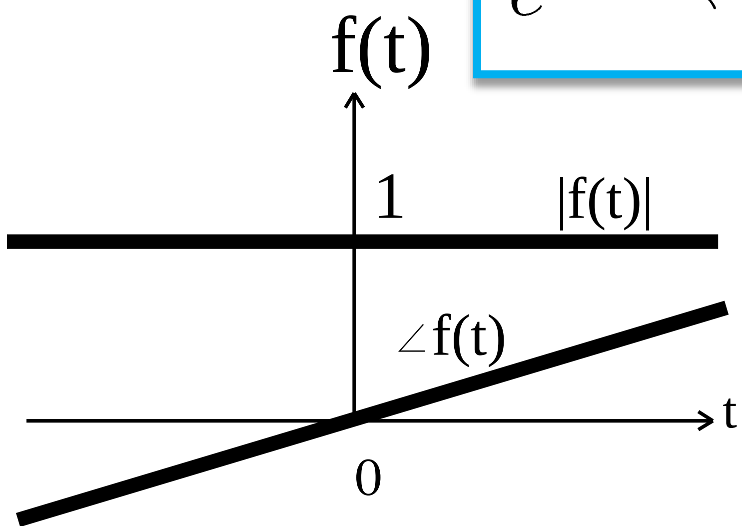
$\because f(t) \leftrightarrow F(\omega) \;\Leftrightarrow\; F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ において

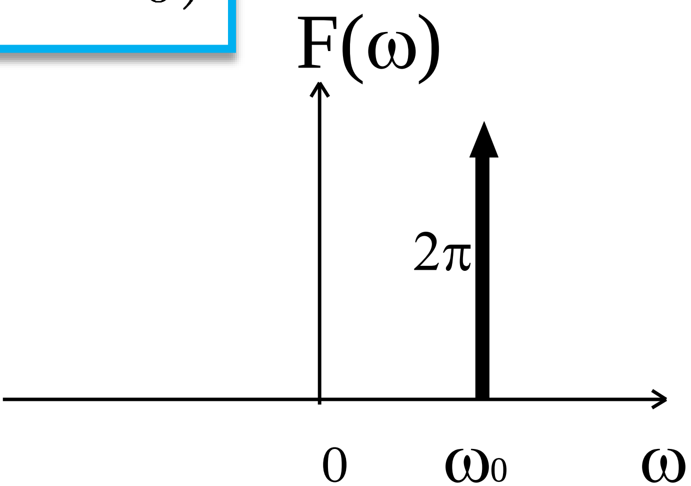
$f(t) = \delta(t),\;\; F(\omega) = 1$ とすると

$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

複素正弦波のFourier変換

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)}$$





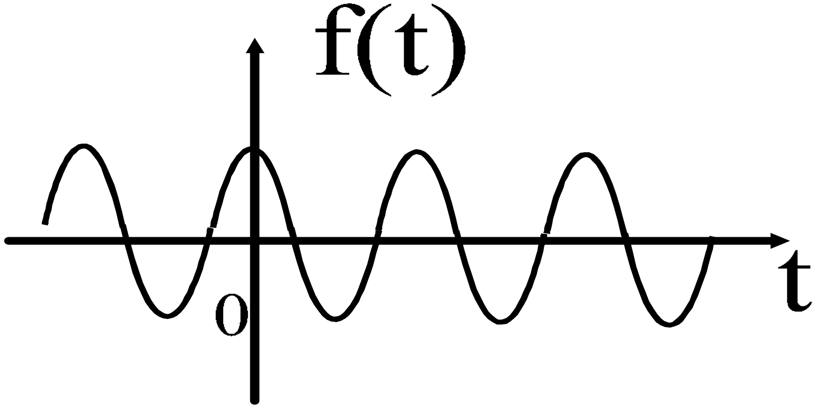
$\because f(t) \leftrightarrow F(\omega) \;\Leftrightarrow\; F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ において

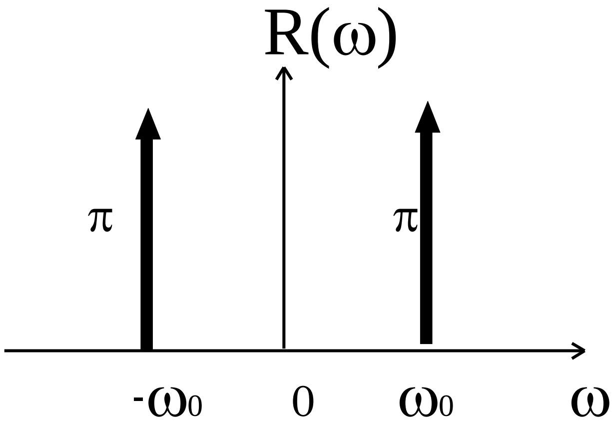
$f(t) = \delta(t-a),\; F(\omega) = e^{-j\omega a}$ とすると

$e^{-jat} \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega - a) = 2\pi\delta(\omega + a)$

$a = -\omega_0$ として，$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

コサイン関数のFourier変換

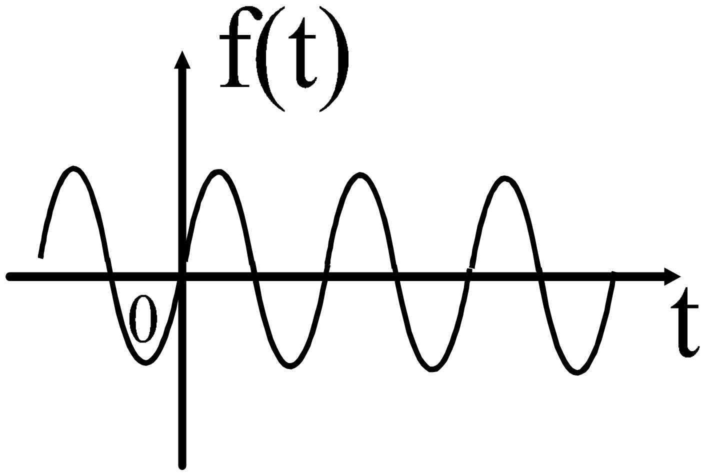


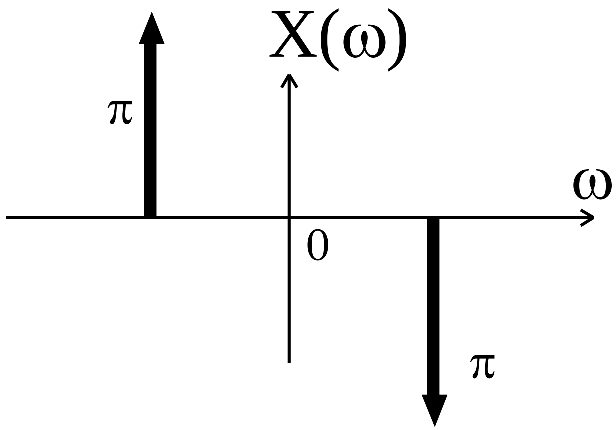


$$\boxed{\cos\omega_0 t \longleftrightarrow \pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right]=\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

サイン関数のFourier変換





$$\boxed{\sin\omega_0 t \longleftrightarrow j\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right]=\frac{2\pi}{2j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

符号関数のFourier変換

- $$f(t) = \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \\ -1 & (t < 0) \end{cases}$$
  - 奇関数より $R(\omega) = 0$

$$\boxed{\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}}$$

$$\begin{aligned} I(\omega) &= -2\int_0^\infty f(t)\sin\omega t dt \\ &= -2\int_0^\infty \sin\omega t dt \\ &= \frac{-2}{\omega} \end{aligned}$$

$$F(\omega) = jI(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

$$\begin{aligned} \because \int_0^\infty \sin\omega t dt &= \lim_{T\to\infty}\int_0^T \sin\omega t dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1-\cos\omega T}{\omega} \\ &= \frac{1}{\omega} \end{aligned}$$