信号処理論第二
第3回 (10/09)

情報理工学系研究科システム情報学専攻
猿渡 洋
hiroshi_saruwatari@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

信号処理論第二　講義予定（金曜2眼）

- 9/25: 第1回
- 10/02: 第2回
- 10/09: 第3回
- 10/16: 第4回
- 10/23: 第5回
- 10/30: 第6回
- 11/06: 第7回
- 11/27: 第8回
- 12/04: 第9回
- 12/11: 第10回
- 12/18: 第11回
- 12/25: 第12回
- 1/08: 第13回
- 01/22: 期末試験（予定）

※2020年度は全て90分講義とする（10時25分～11時55分）

講義内容

- δ関数再考
- δ関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

講義資料と成績評価

- 講義資料
  - システム1研HP　http://www.sp.ipc.i.u-tokyo.ac.jp/ からダウンロードできるようにしてあります
- 成績評価
  - 学期末試験

前回の復習

- δ関数の正しい定義
  - 例）$\delta(t) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t}$
- 実関数のFourier変換の性質
  - **実関数 $f(t)$ の Fourier 変換 $F(\omega)$ は $F(-\omega) = F^*(\omega)$ を満たす**
  - **すなわち、$F(\omega)$ の実部は偶関数、$F(\omega)$ の虚部は奇関数**
  - **逆に $f(t)$ が偶関数ならば、$F(\omega)$ は実部のみ（虚部 0）**
    $f(t)$ が奇関数ならば、$F(\omega)$ は虚部のみ（実部 0）
- 重畳積分定理
- Parsevalの定理
- δ関数や不連続関数を含むFourier変換

符号関数のFourier変換

- $f(t) = \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \\ -1 & (t < 0) \end{cases}$
  - 奇関数より $R(\omega) = 0$

$$I(\omega) = -2\int_0^\infty f(t)\sin\omega t dt$$
$$= -2\int_0^\infty \sin\omega t dt$$
$$= \frac{-2}{\omega}$$

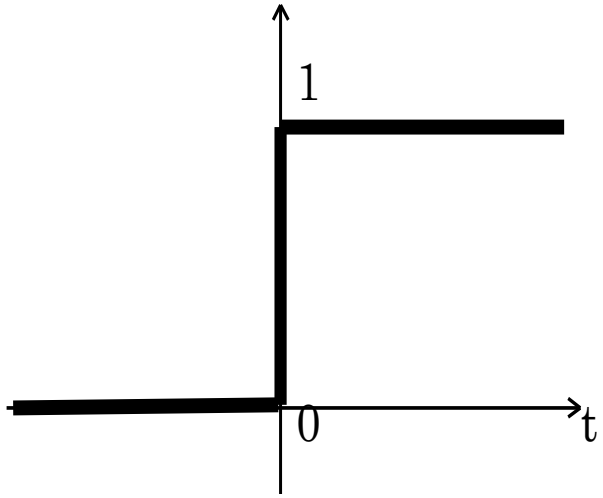
$$F(\omega) = jI(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

$$\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$\because \int_0^\infty \sin\omega t dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \sin\omega t dt$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1-\cos\omega T}{\omega}$$
$$= \frac{1}{\omega}$$

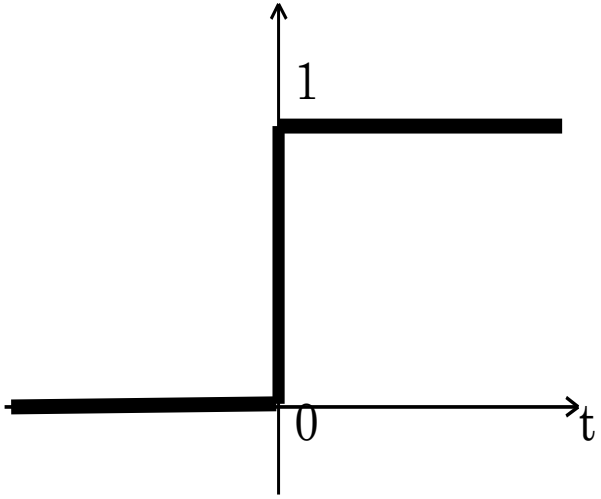
ステップ関数のFourier変換

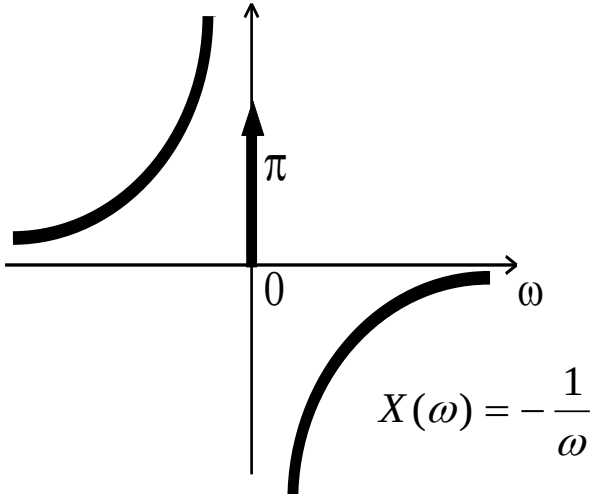
- $$f(t) = U(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 1/2 & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$



ステップ関数のFourier変換

- $$f(t) = U(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 1/2 & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$





$$U(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\because U(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

δ関数の高階微分のFourier変換

- $f(t) = \dfrac{d^n \delta(t)}{dt^n}$

δ関数の高階微分のFourier変換

- $f(t) = \dfrac{d^n \delta(t)}{dt^n}$

$$\frac{d^n \delta(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n$$

$$\because F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} e^{-j\omega t} dt$$

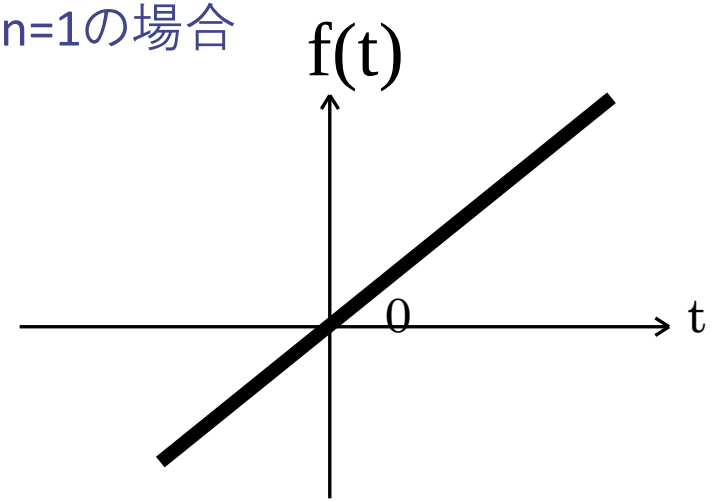
$$= (-1)^n \left. \frac{d^n e^{-j\omega t}}{dt^n} \right|_{t=0}$$

$$= (j\omega)^n$$

べき乗関数のFourier変換

- $f(t) = t^n$

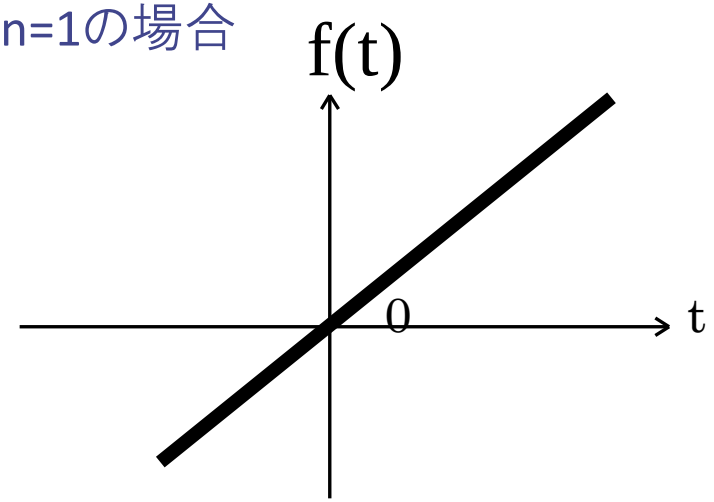
n=1の場合

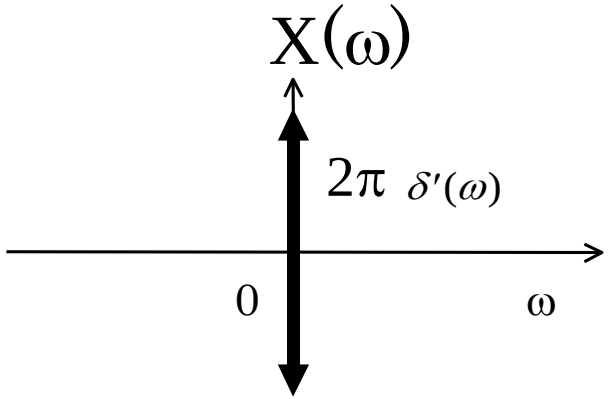


べき乗関数のFourier変換

- $f(t) = t^n$

n=1の場合





$$t^n \leftrightarrow 2\pi j^n \frac{d^n \delta(\omega)}{d\omega^n}$$

べき乗関数のFourier変換の証明

$$\frac{d^n\delta(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n$$

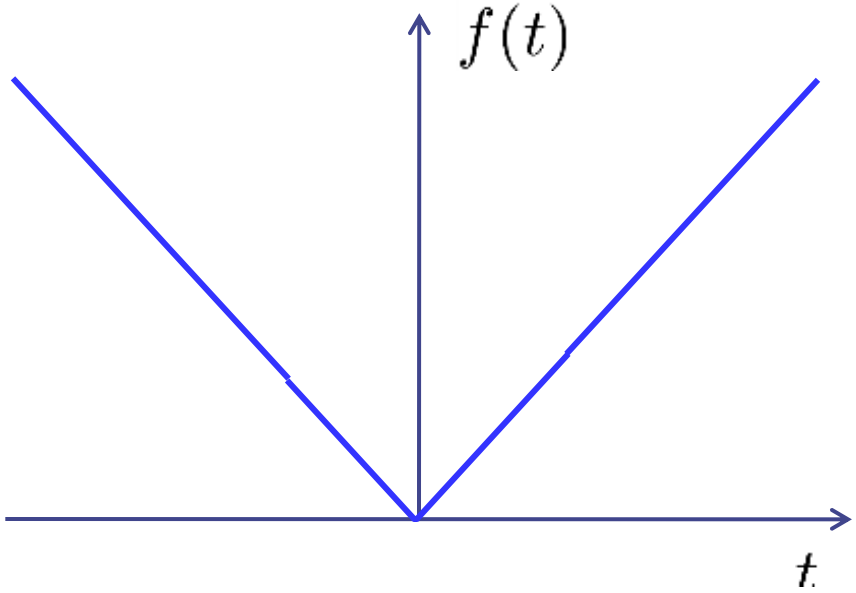
$$(-j)^n \frac{d^n\delta(t)}{dt^n} \leftrightarrow \omega^n$$

$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ を用いれば

$$t^n \leftrightarrow 2\pi j^n \frac{d^n\delta(\omega)}{d\omega^n}$$

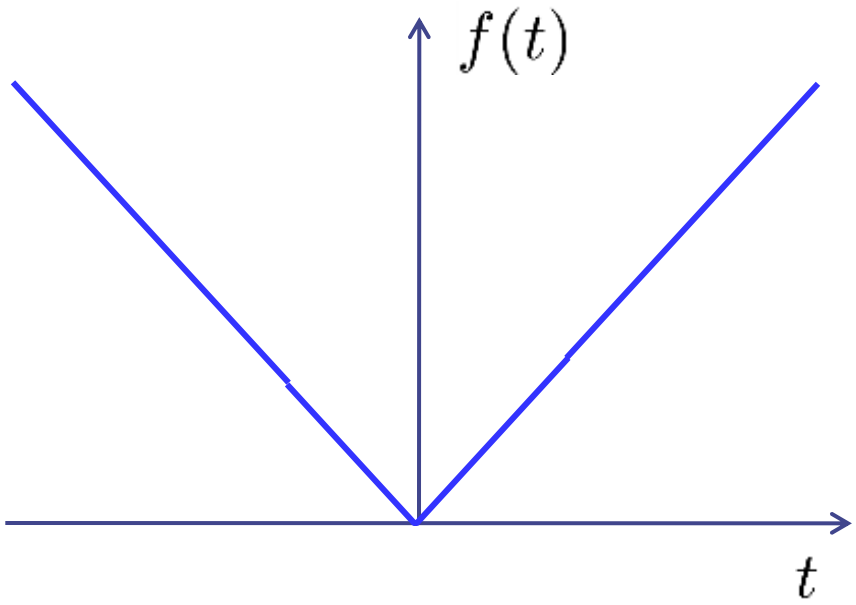
絶対値関数のFourier変換

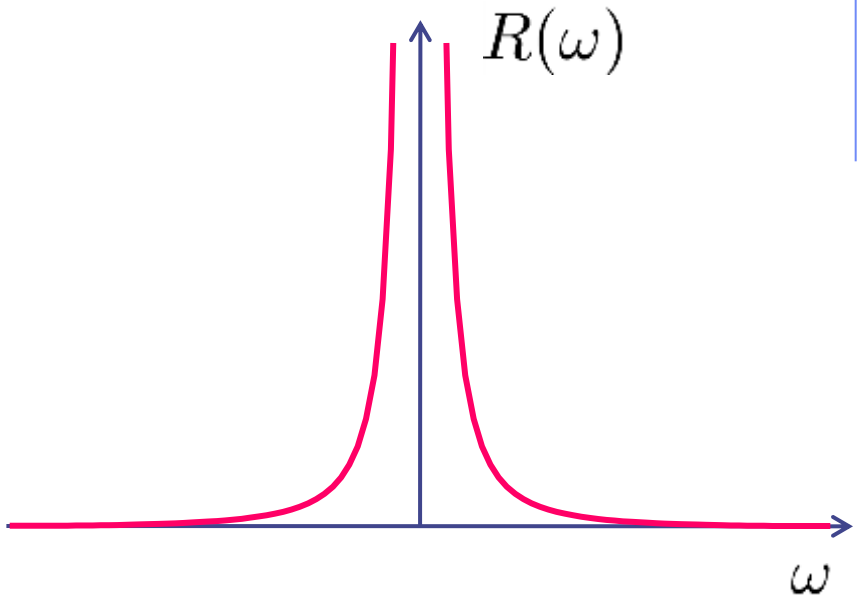
- $f(t) = |t|$



絶対値関数のFourier変換

- $f(t) = |t|$





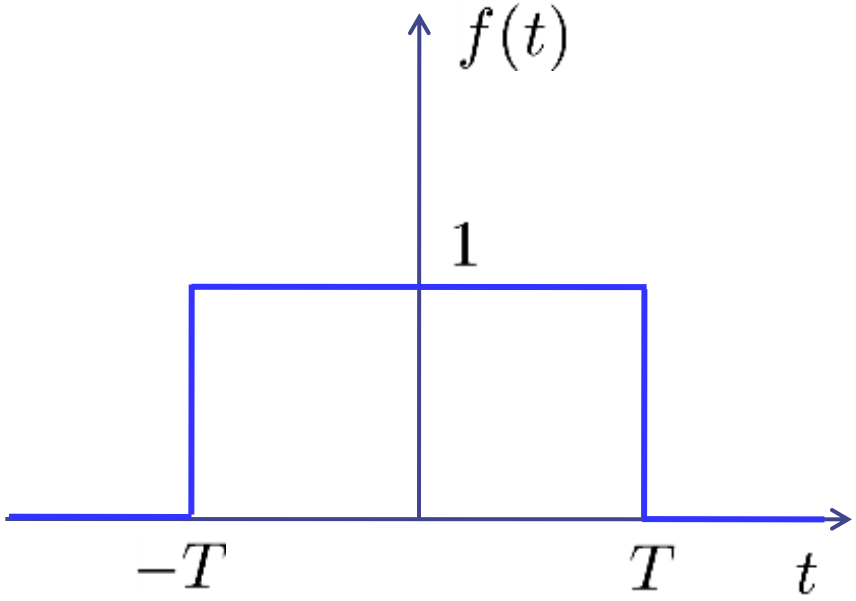
$$|t| \leftrightarrow -\frac{2}{\omega^2}$$

絶対値関数のFourier変換の証明

$$
\begin{aligned}
\because \mathcal{F}[t \cdot \mathrm{sgn}t] &= \frac{1}{2\pi}\left(2\pi j \frac{d\delta(\omega)}{d\omega}\right) * \left(\frac{2}{j\omega}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta(y)}{dy} \cdot \frac{2}{\omega - y} dy \\
&= -2\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \cdot \frac{(-1)(-1)}{(\omega - y)^2} dy \\
&= -\frac{2}{\omega^2}
\end{aligned}
$$

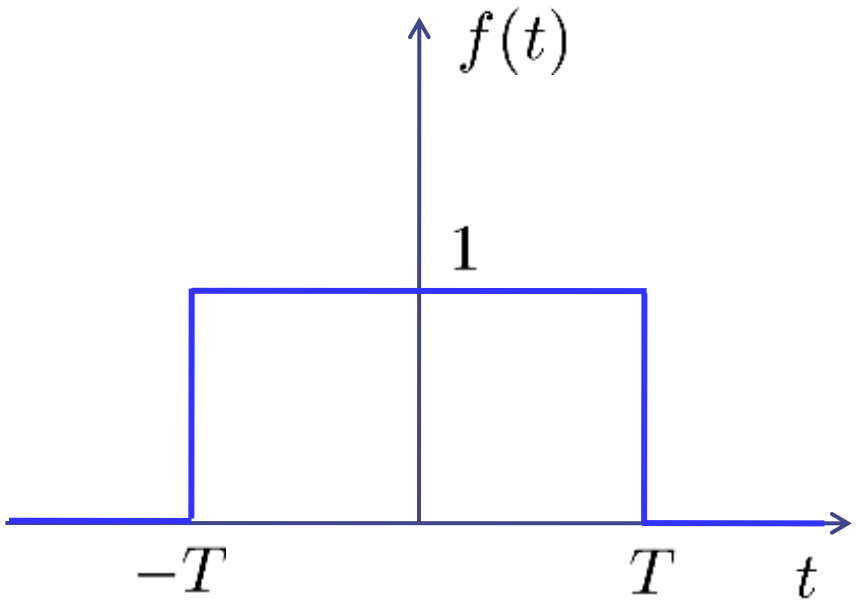
矩形関数のFourier変換

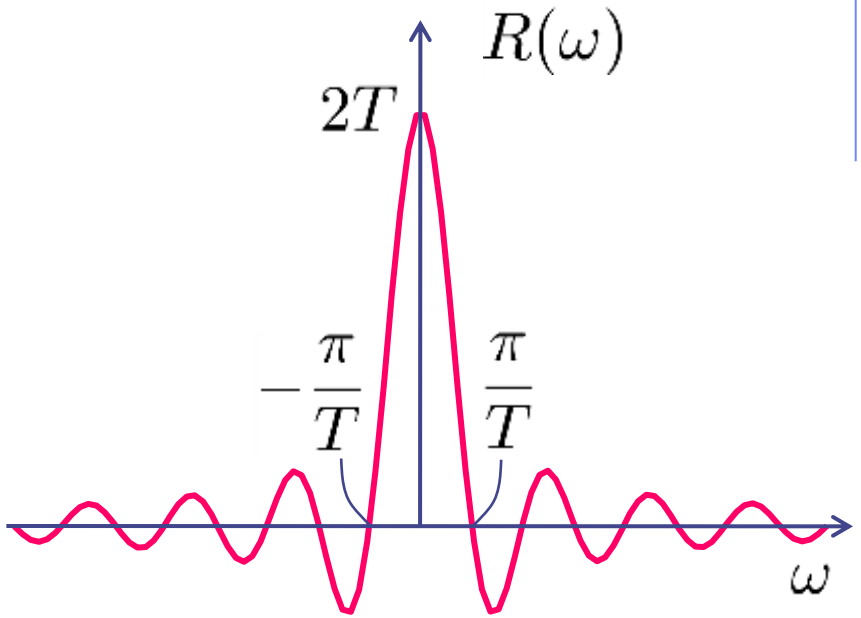
- $f(t) = P_T(t)$



矩形関数のFourier変換

- $f(t) = P_T(t)$





$$P_T(t) \leftrightarrow \frac{2\sin\omega T}{\omega}$$

矩形関数のFourier変換の証明

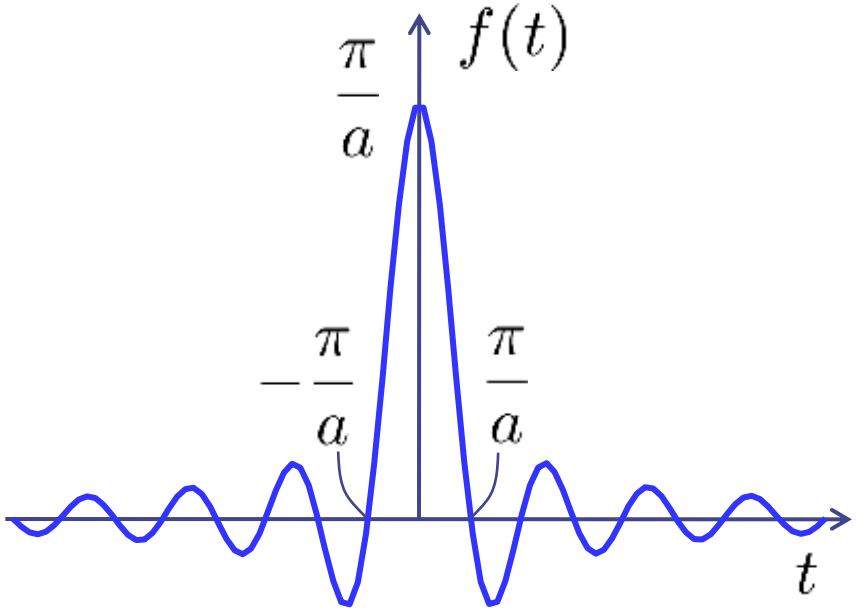
$$\because \int_{-\infty}^{\infty} P_T(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t}dt$$

$$= \frac{1}{-j\omega}\left(e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}\right)$$

$$= \frac{2\sin\omega T}{\omega}$$

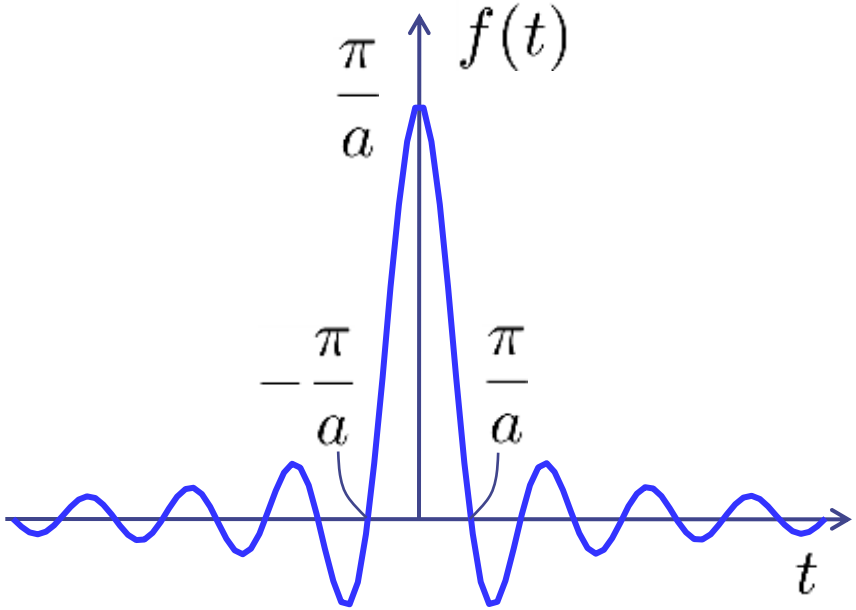
sinc関数のFourier変換

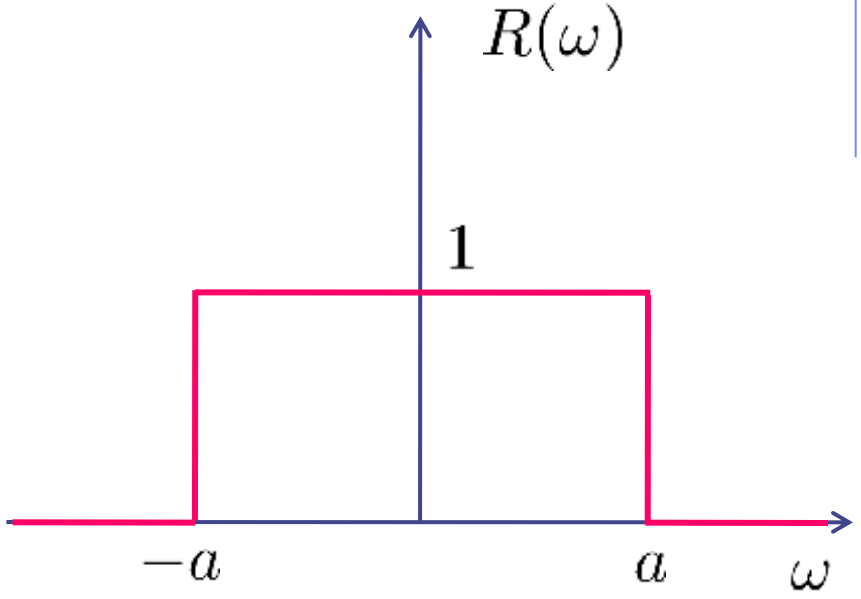
- $f(t) = \dfrac{\sin at}{\pi t}$



sinc関数のFourier変換

- $f(t) = \dfrac{\sin at}{\pi t}$



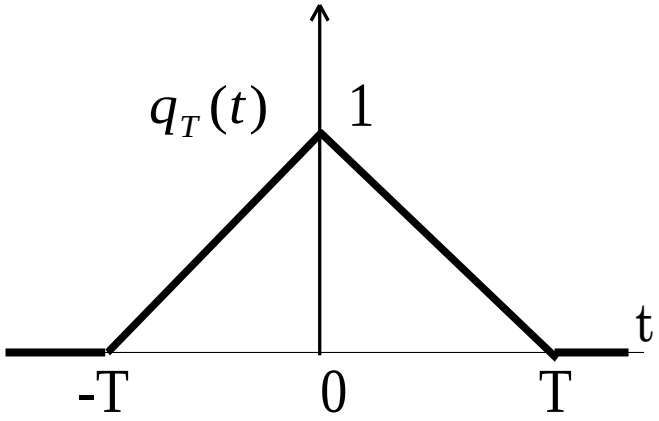


$$\frac{\sin at}{\pi t} \leftrightarrow P_a(\omega)$$

$\because F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ より $\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{2\sin at}{t} \leftrightarrow P_a(-\omega)$

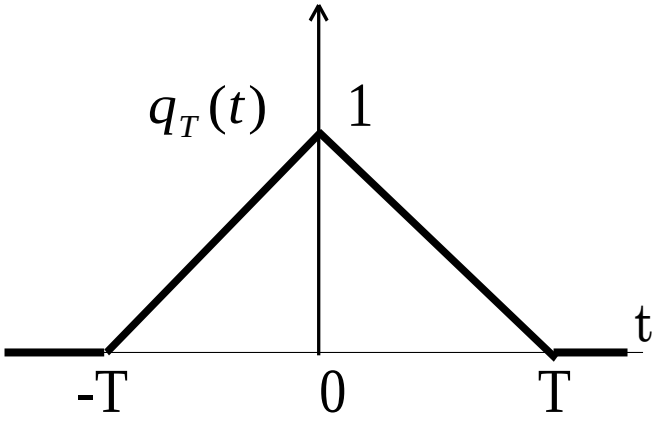
三角窓(bartlett窓)のFourier変換

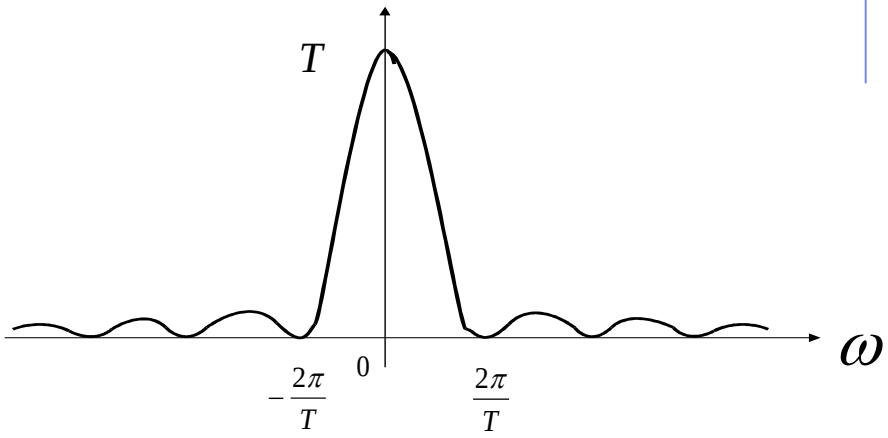
- $f(t) = q_T(t)$



三角窓(bartlett窓)のFourier変換

- $f(t) = q_T(t)$





$$q_T(t) \leftrightarrow \frac{4\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{T\omega^2}$$

三角窓(bartlett窓)のFourier変換の証明1

$$q_T(t) = \frac{1}{T} P_{T/2}(t) * P_{T/2}(t)$$

$P_{T/2}(t) * P_{T/2}(t) = T q_T(t)$ を示す。

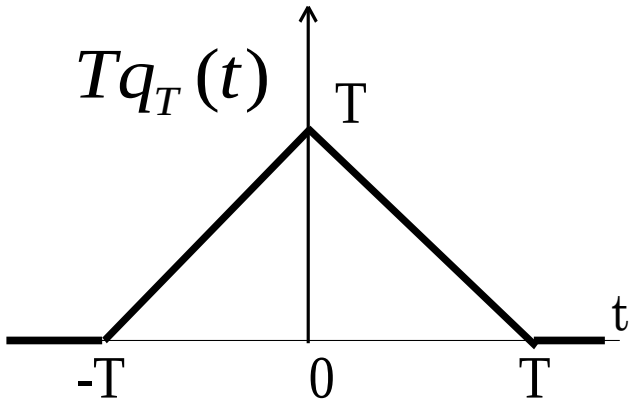
$$\because P_{T/2}(t) * P_{T/2}(t)$$

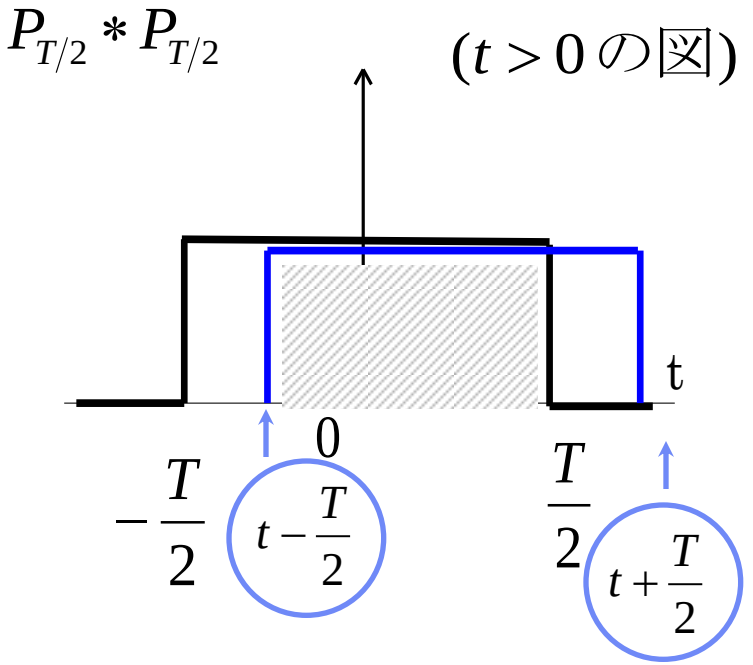
$$= \int_{-\infty}^{\infty} P_{T/2}(\tau) P_{T/2}(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} P_{T/2}(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{t-T/2}^{t+T/2} P_{T/2}(\tau') d\tau'$$

$$= \begin{cases} T-t & (0 < t < T) \\ T+t & (-T < t \leq 0) \\ 0 & (t \leq -T,\ t \geq T) \end{cases}$$





三角窓(bartlett窓)のFourier変換の証明2

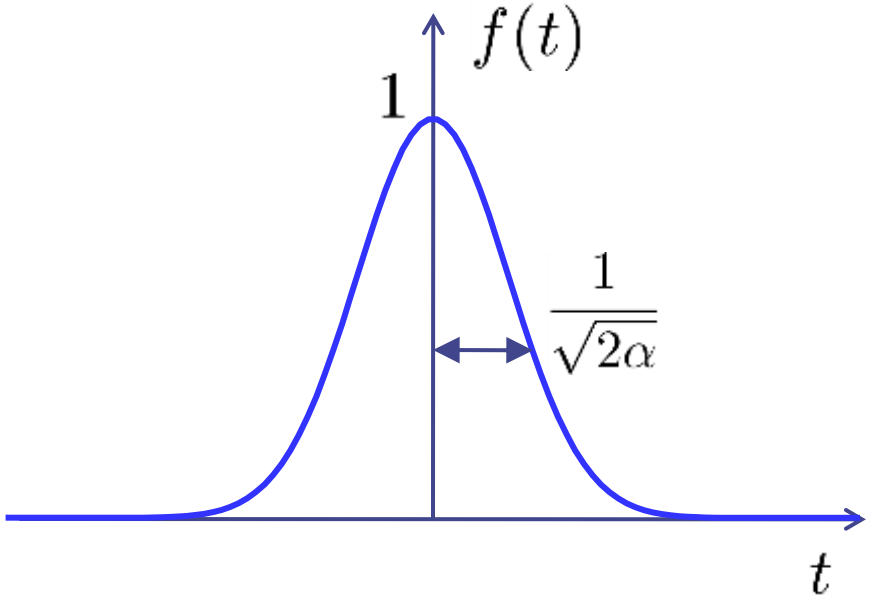
$$\mathrm{F}(q_T)=\frac{1}{T}\mathrm{F}\left(P_{T/2}*P_{T/2}\right) \quad \left(\because q_T=\frac{1}{T}P_{T/2}*P_{T/2}\right)$$

$$=\frac{1}{T}\frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega}\cdot\frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} \quad \left(\because P_{T/2}(t)\leftrightarrow\frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega}\right)$$

$$=\frac{4\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{T\omega^2}$$

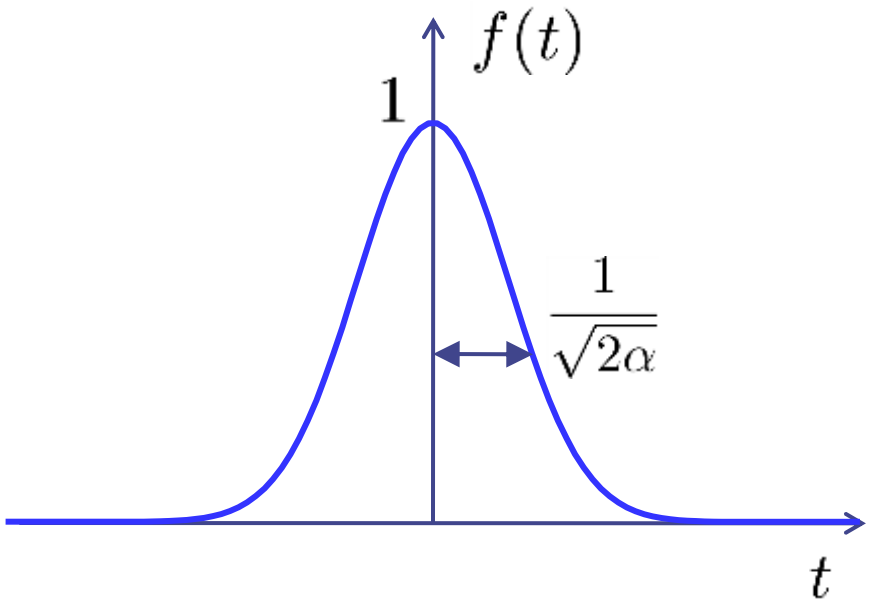
ガウス関数のFourier変換

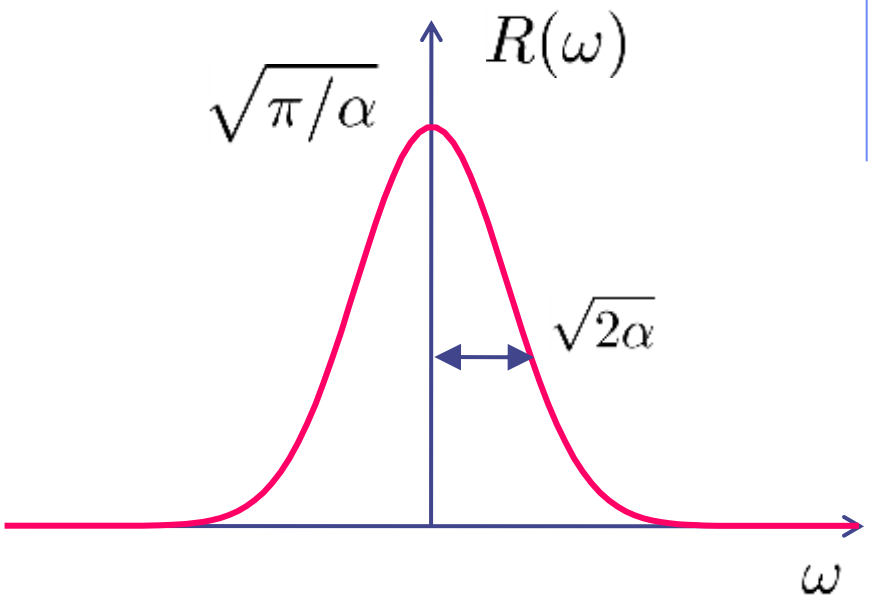
- $f(t) = e^{-\alpha t^2}$



ガウス関数のFourier変換

- $f(t) = e^{-\alpha t^2}$





$$e^{-\alpha t^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

ガウス関数のFourier変換は、またガウス関数

ガウス関数のFourier変換の証明

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha}t + \frac{j\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha}} \mathrm{d}t$$

$$= e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} \mathrm{d}t$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

補足事項:ガウス関数の積分1

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ の証明

求める積分値を I とおくと

$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-y^2}dy$ と表せるので、

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

ここで $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ とおけば、$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ だから

$$I^2 = \int_0^\infty re^{-r^2}dr \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty re^{-r^2}dr = \frac{\pi}{4}$$

前のページ(変数変換)に関するメモ

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のとき，ヤコビアンは

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta)\end{bmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

よって，

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^\infty f(r\cos\theta, r\sin\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta.$$

最後の積分 $\int_0^\infty re^{-r^2}dr$ は $s = -r^2$ という変数変換を用いて算出可能。
$ds = -2rdr$ より

$$\int_0^\infty re^{-r^2}dr = \int_{-\infty}^0 re^s\frac{1}{-2r}ds = \frac{1}{-2}[e^s]_0^{-\infty} = \frac{1}{-2}\cdot(-1) = \frac{1}{2}$$

補足事項:ガウス関数の積分2(複素積分利用)

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+jb)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$の証明

$f(z) = e^{-z^2}$を図に示す四辺形にそって積分する.

$\oint e^{-z^2}dz$を求める. ただし, $z = x + jy$で,

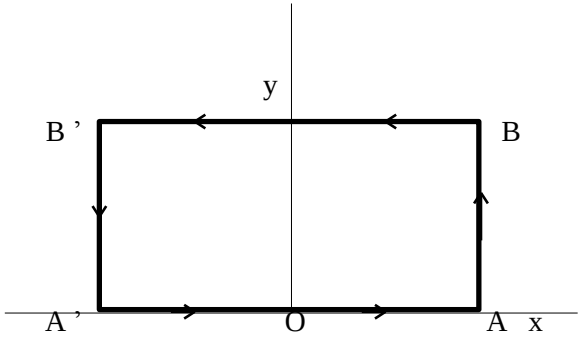
$OA = a, AB = b$とする.

$A'A$にそっては, $\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx$であり,

ABにそっては, $j\int_{0}^{b} e^{-(a+jy)^2}dy$,

BB'にそっては, $\int_{a}^{-a} e^{-(x+jb)^2}dx$,

$B'A$にそっては, $j\int_{b}^{0} e^{-(-a+jy)^2}dy$である.



第二, 第四の積分は,

$a \to \infty$で0になる.

e^{-z^2}はこの変域で正則だから

一周積分は0.

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx + \int_{\infty}^{-\infty} e^{-(x+jb)^2}dx = 0$$

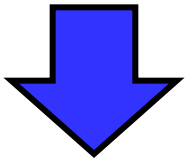
$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+jb)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

ガウス関数の変換対に関する最小局在関係

ある関数 $x(t)$ のFourier 変換対に関して、以下の「局在度」を定義する。

$$\Delta_{t\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 x(t)^2 \mathrm{d}t \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$$

変換対において、この局在度が最小となる関数は何か？



これがガウス型の関数であることを示す

ガウス関数の変換対に関する最小局在関係2

方針としては、両変換領域の値に関してコーシー・シュワルツの不等式を適用し、その等号成立条件より最小値の条件を導く。

まず準備としてω軸の積分をt軸の積分に対応させるため、$x(t)$の微分

$$x'(t) = \frac{1}{2\pi}\int j\omega X(\omega)d\omega \tag{2}$$

にパーセバルの等式を適用して

$$\frac{1}{2\pi}\int \omega^2|X(\omega)|^2 d\omega = \int |x'(t)|^2 dt \tag{3}$$

コーシー・シュワルツの不等式を適用し、局在度合に関して以下の不等式が成立する。

続く

ガウス関数の変換対に関する最小局在関係3

（続き）

$$\Delta_{t\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 x(t)^2 \mathrm{d}t \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |tx(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |x'(t)|^2 dt \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} tx(t)x'(t)dt \right|^2$$

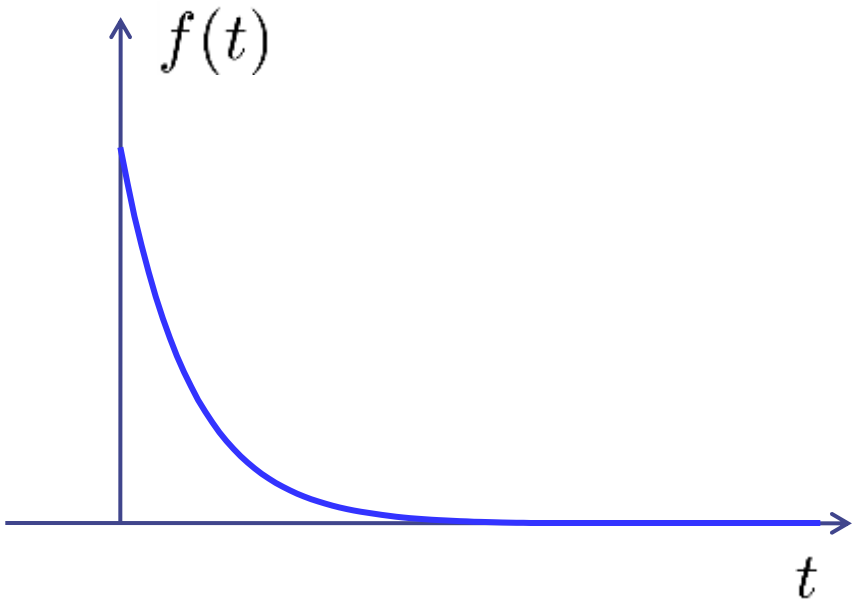
コーシー・シュワルツ不等式

等号成立時が局在度合が最小となるときであるが、その場合 $x'(t) = c \cdot tx(t)$（c は定数）を満たすので、$x(t)$ はガウス関数となる。

別の解釈
→ この右辺（等号成立時）以下に局在度を下げることは出来ない
→ 時間と周波数における「**不確定性原理**」を表している

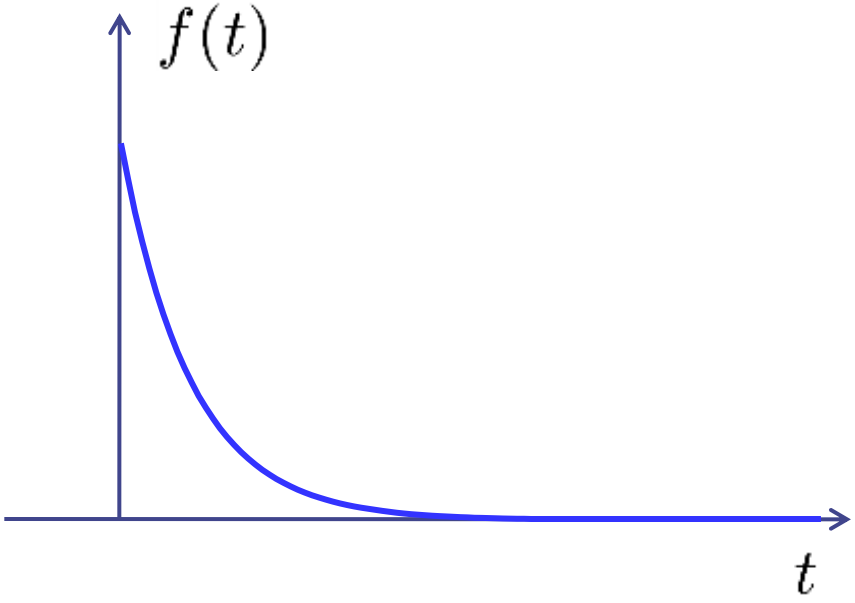
片側指数関数のFourier変換

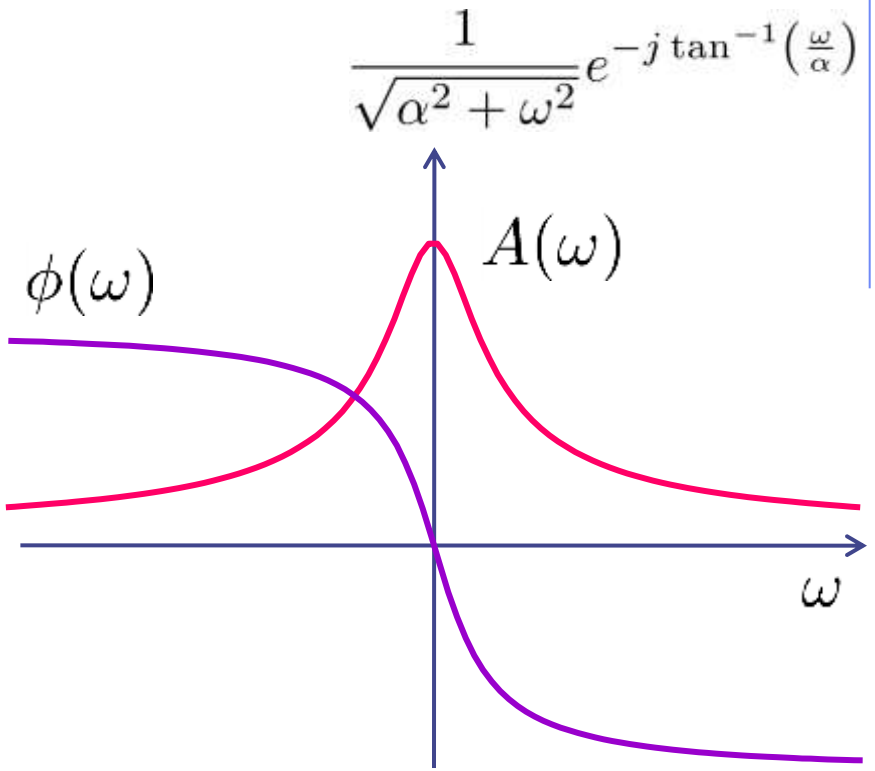
- $f(t) = e^{-\alpha t}$



片側指数関数のFourier変換

- $f(t) = e^{-\alpha t}$





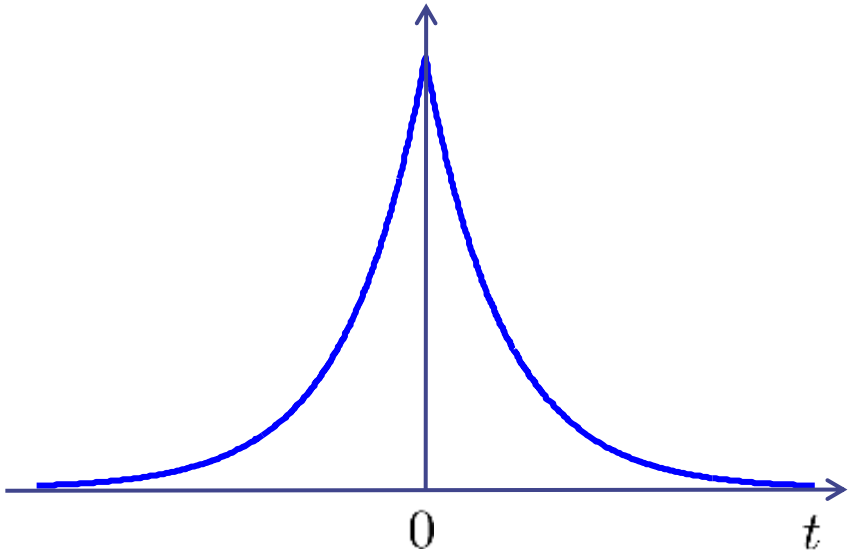
$$e^{-\alpha t}U(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad (\alpha > 0)$$

片側指数関数のFourier変換の証明

$$
\begin{aligned}
\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} U(t) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\alpha + j\omega}
\end{aligned}
$$

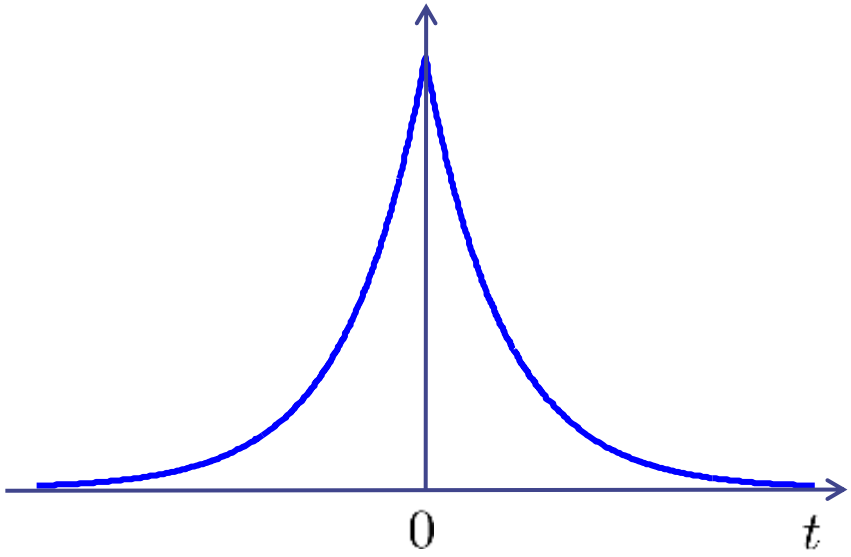
両側指数関数のFourier変換

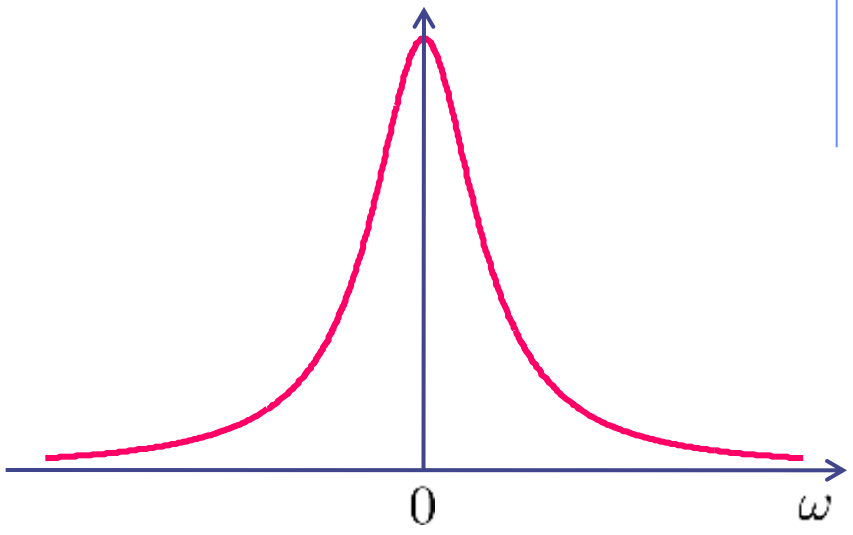
- $f(t) = e^{-\alpha|t|}$



両側指数関数のFourier変換

- $f(t) = e^{-\alpha|t|}$





$$e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\alpha > 0)$$

両側指数関数のFourier変換の証明

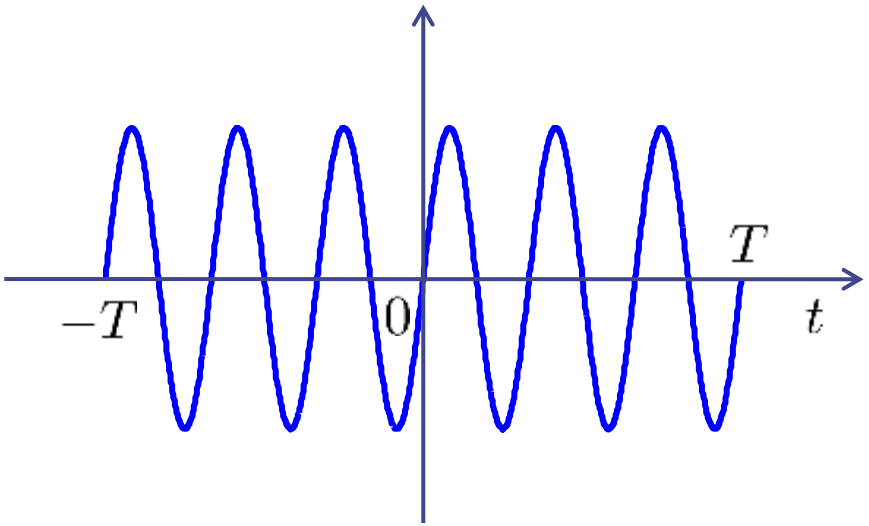
$$\because \mathcal{F}[e^{-\alpha t}U(t) + e^{\alpha t}U(-t)]$$

$$= \frac{1}{\alpha + j\omega} + \frac{1}{\alpha - j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t}U(-t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j\omega)t}dt = \frac{1}{\alpha - j\omega}$$

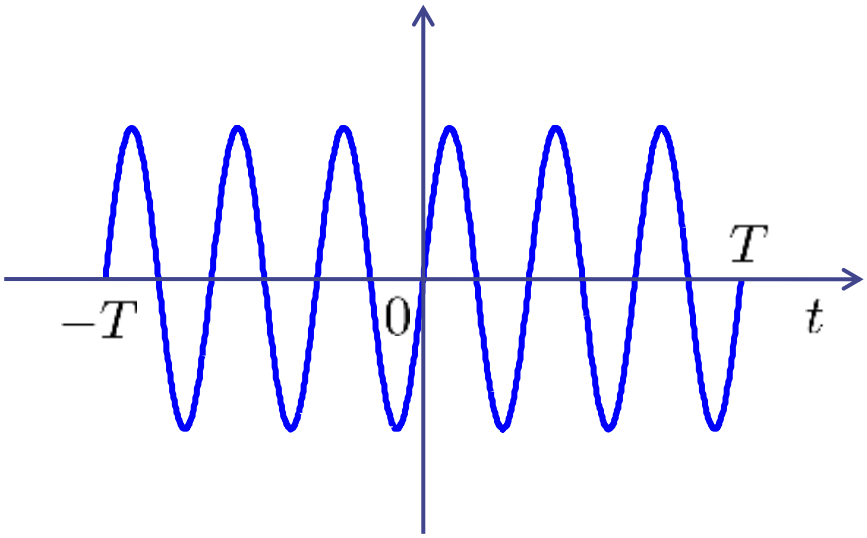
有限時間正弦波のFourier変換

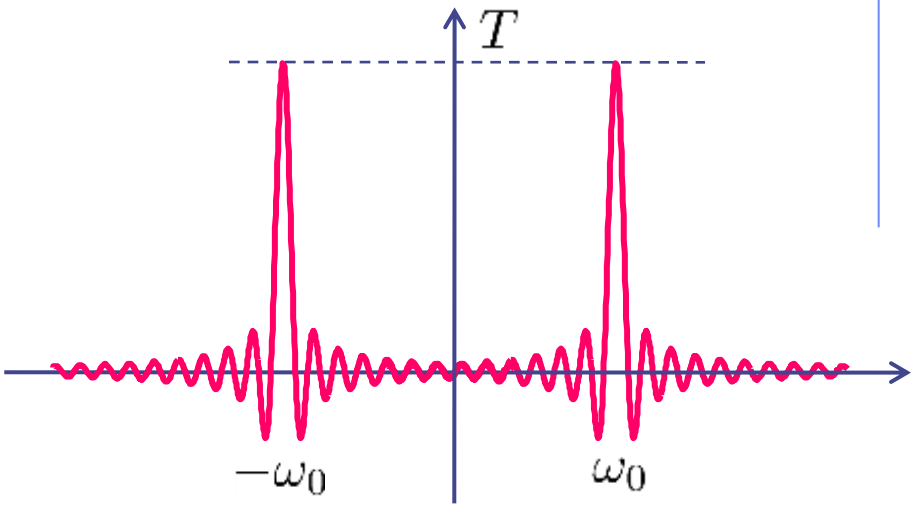
- $f(t) = P_T(t)\cos\omega_0 t$



有限時間正弦波のFourier変換

- $f(t) = P_T(t)\cos\omega_0 t$





$$P_T(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{\sin(\omega+\omega_0)T}{\omega+\omega_0} + \frac{\sin(\omega-\omega_0)T}{\omega-\omega_0}$$

有限時間正弦波のFourier変換の証明

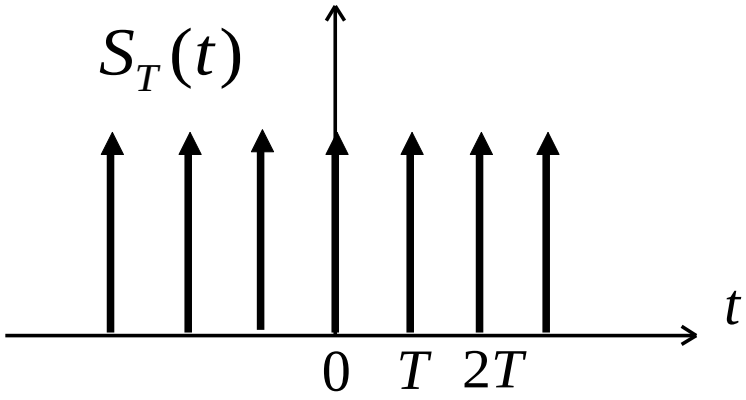
$$\because\ \mathrm{F}\left[P_T(t)\cos\omega_0 t\right] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{F}\left[P_T(t)\right] * \mathrm{F}\left[\cos\omega_0 t\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{2\sin\omega T}{\omega} * \left[\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$= \frac{\sin(\omega+\omega_0)T}{\omega+\omega_0} + \frac{\sin(\omega-\omega_0)T}{\omega-\omega_0}$$

周期δ関数のFourier変換

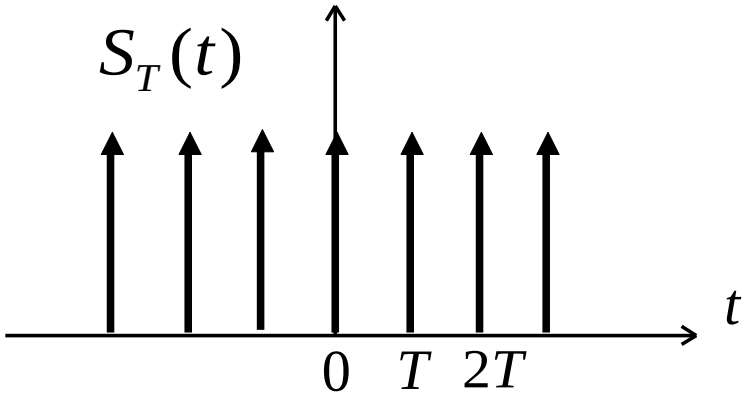
- $f(t) = S_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$

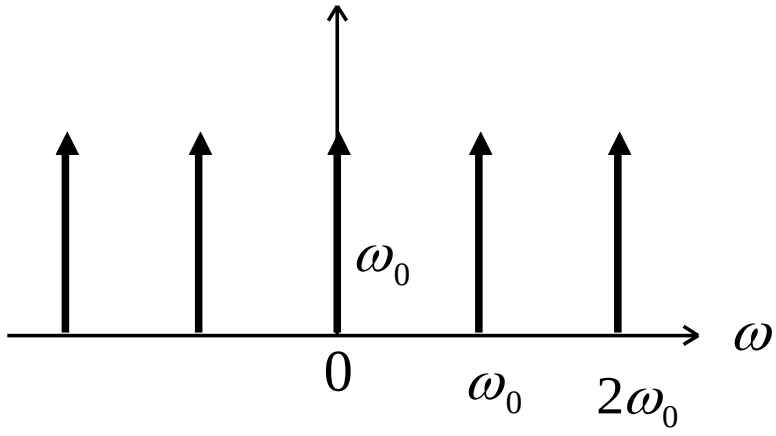


周期δ関数のFourier変換

- $f(t) = S_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$

$$F(\omega) = \omega_0 S_{\omega_0}(\omega)$$





$$S_T(t) \leftrightarrow \omega_0 S_{\omega_0}(\omega)$$

$$\omega_0 = 2\pi/T$$

周期δ関数のFourier変換の証明1

$$S_T(t) \quad \longleftrightarrow \quad \omega_0 S_{\omega_0}(\omega)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \qquad = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

これを示せれば

これは明らか

$$\stackrel{?}{=} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \qquad \because e^{jat} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - a)$$

周期δ関数のFourier変換の証明2

$$K_N(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \frac{e^{j(N+1)\omega_0 t} - e^{-jN\omega_0 t}}{T(e^{j\omega_0 t} - 1)} \cdot \frac{e^{-\frac{j\omega_0 t}{2}}}{e^{-\frac{j\omega_0 t}{2}}}$$

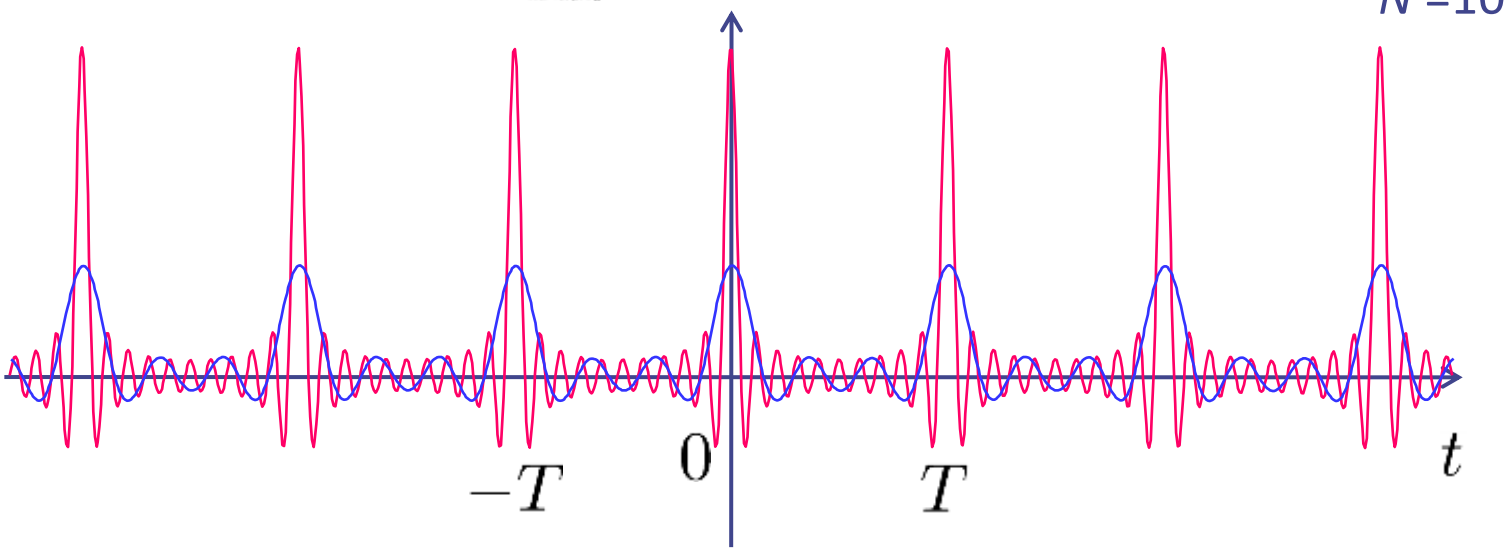
$$= \frac{e^{j(N+\frac{1}{2})\omega_0 t} - e^{-j(N+\frac{1}{2})\omega_0 t}}{T(e^{\frac{j\omega_0 t}{2}} - e^{-\frac{j\omega_0 t}{2}})} = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{T\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}$$

周期δ関数のFourier変換の証明3

$$K_N(t) = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{T\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}$$

周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

$$\lim_{t\to 0} K_N(t) = 2N+1$$



周期δ関数のFourier変換の証明4

区間 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ で $K_N(t) \to \delta(t)$ を示せば
$\lim_{N\to\infty} K_N(t) = S_T(t)$ が成立

$$K_N(t) = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{T\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{Tt} \cdot \frac{t}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}$$

ここで, $$\lim_{N\to\infty} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{Tt} = \frac{\pi}{T}\delta(t)$$

$$\because \delta(t) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{\sin\omega t}{\pi t}$$

周期δ関数のFourier変換の証明5

$\dfrac{t}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}$ は区間 $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ で有界

$|t| < \frac{T}{2}$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} K_N(t) = \frac{\pi}{T}\frac{t}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}\delta(t) = \frac{\pi}{T}\left.\frac{t}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}\right|_{t=0}\delta(t)$$

$$\left.\frac{t}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}\right|_{t=0} = \frac{2}{\omega_0}$$

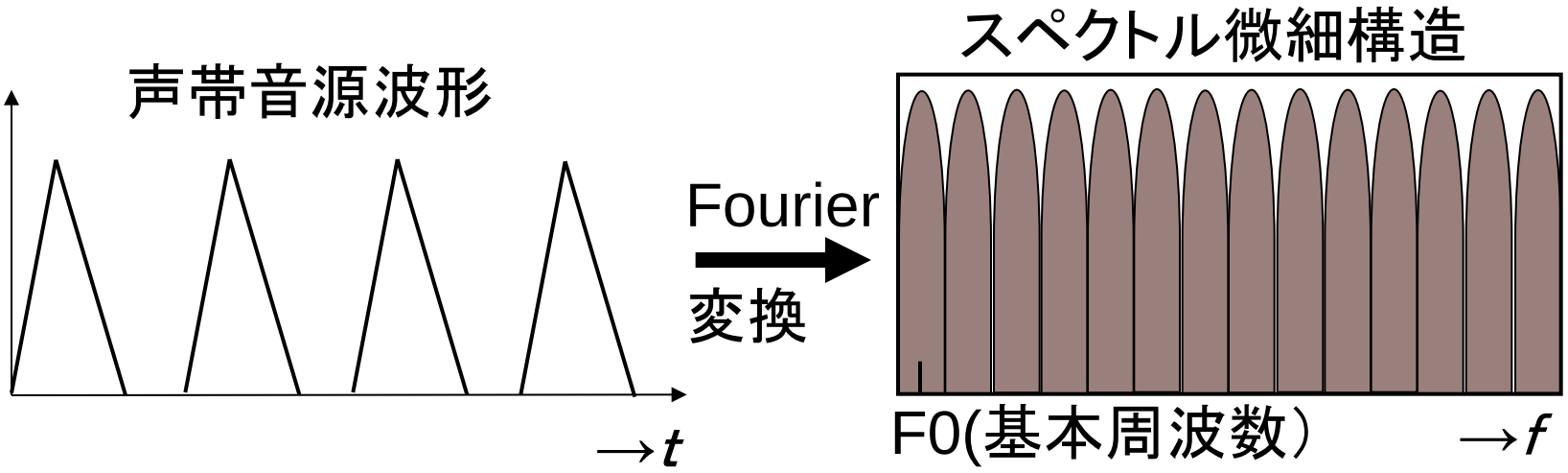
$$= \delta(t)$$

音声分析と周期関数

- 数学的に
  $x(n)$が周期信号である場合には、その周波数特性 $X(k)$ も周期関数となる。

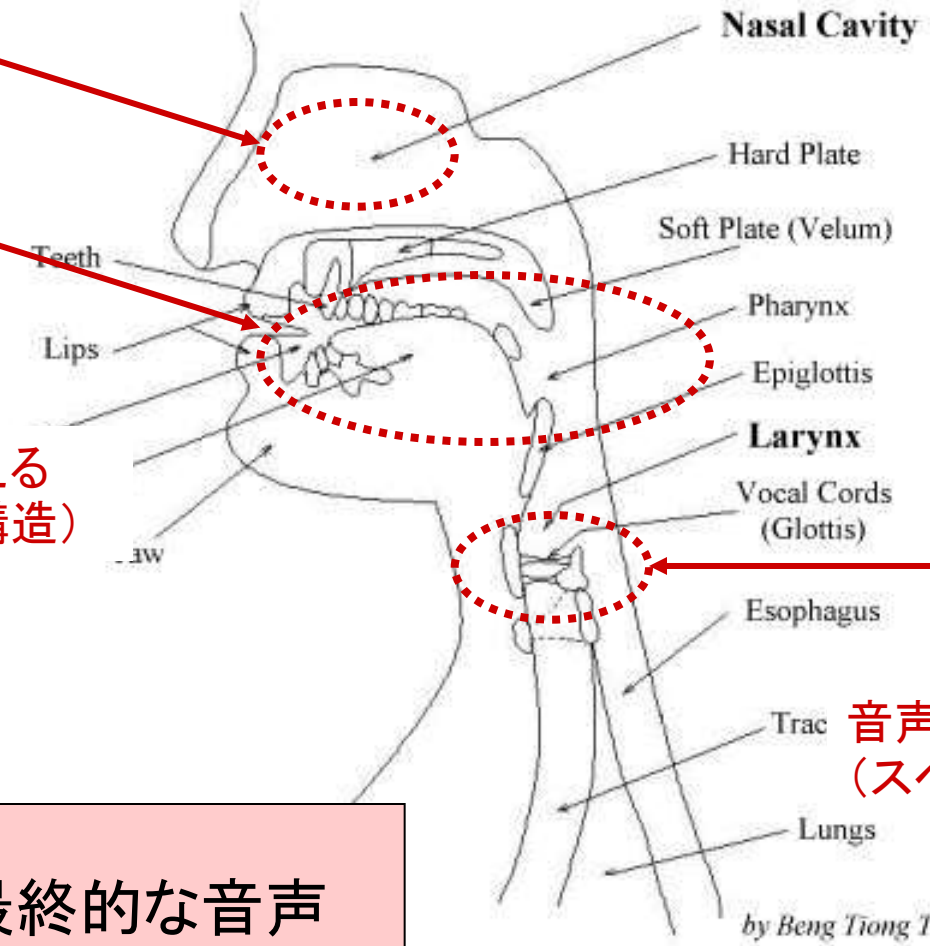
- 一般に音声における声帯音源信号は…
  - 有声音の場合には「周期的三角波」

  ⇒　声帯音源の振幅スペクトルは周期的な微細構造を持つ。よって音声信号自体も周期的スペクトルとなる。



音声のスペクトル構造：発声構造

人間頭部の断面図



②

鼻腔

声道

の共振

音声の音色を与える
（スペクトル包絡構造）

①

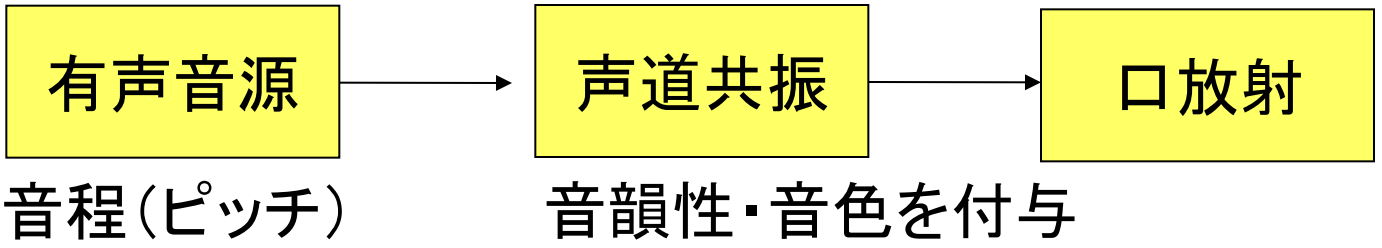
声帯の振動

音声の基本周期を与える
（スペクトル微細構造）

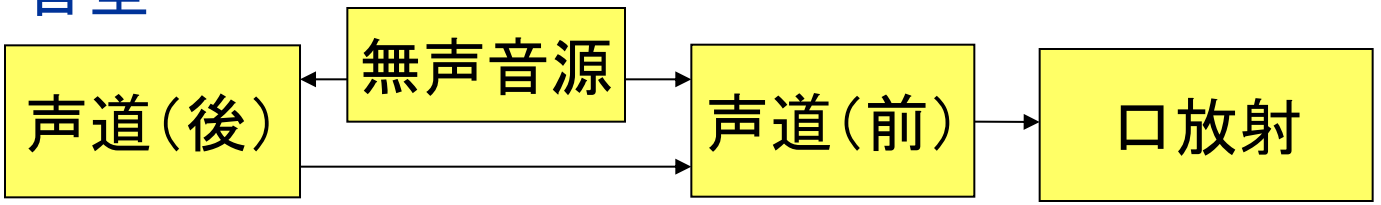
①×②＝最終的な音声

音声のスペクトル構造：発声構造2

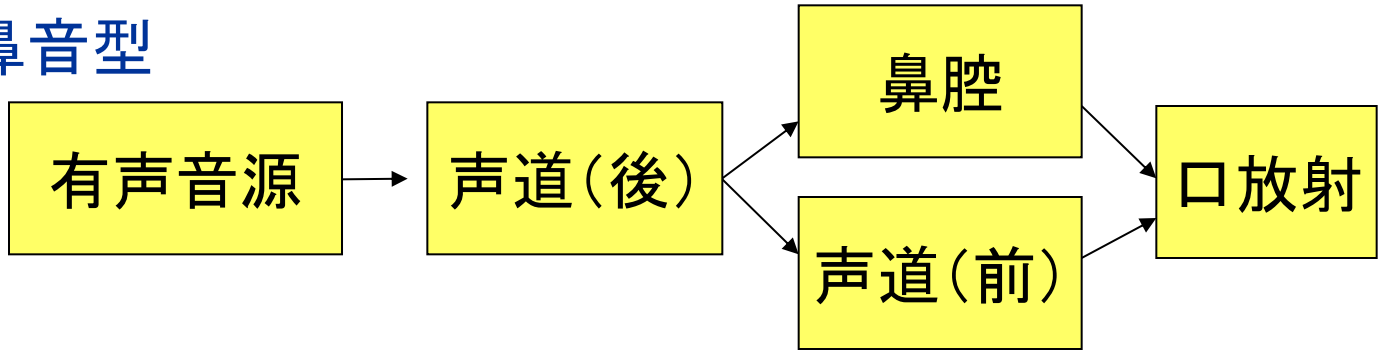
母音型



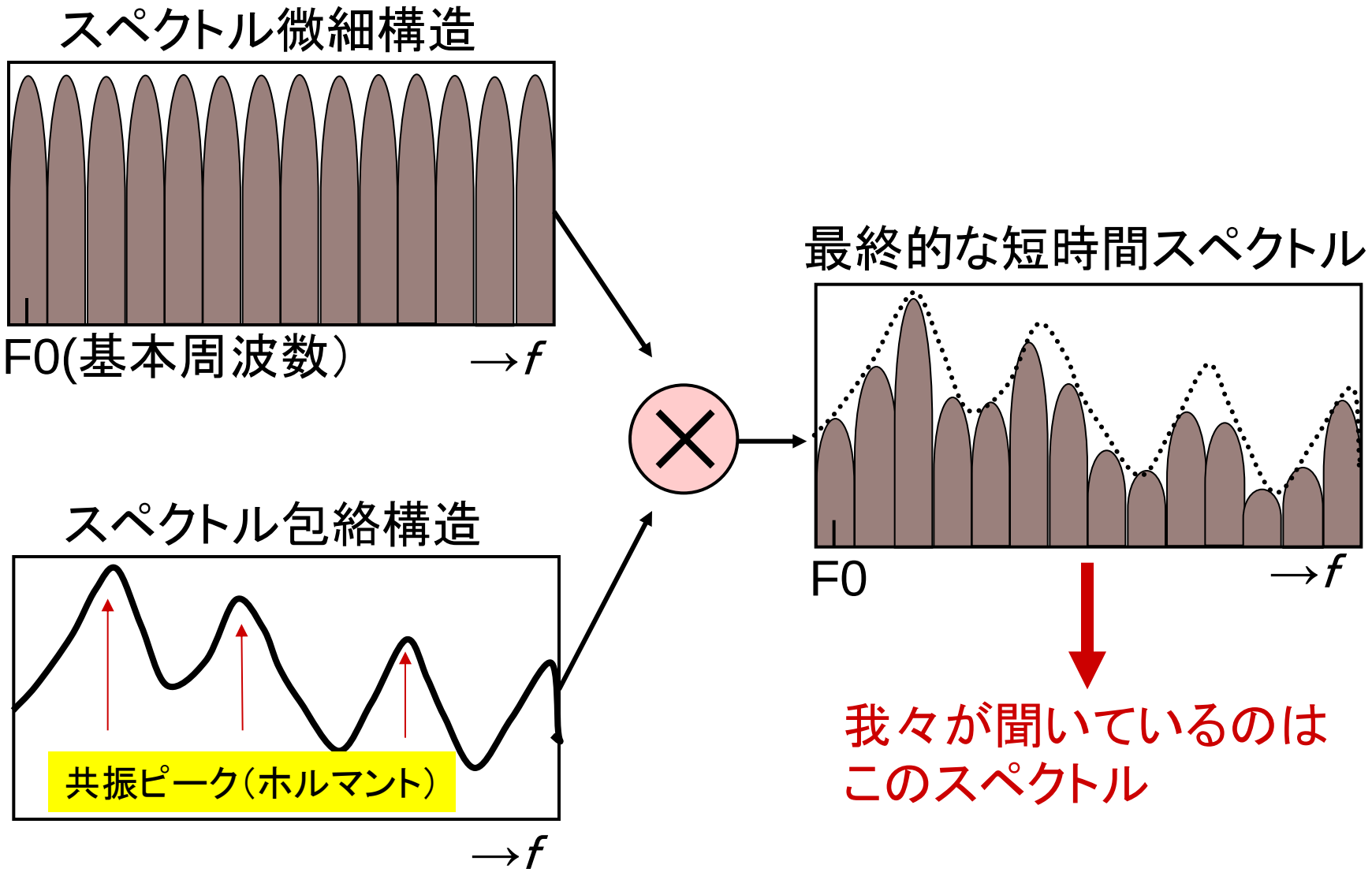
子音型



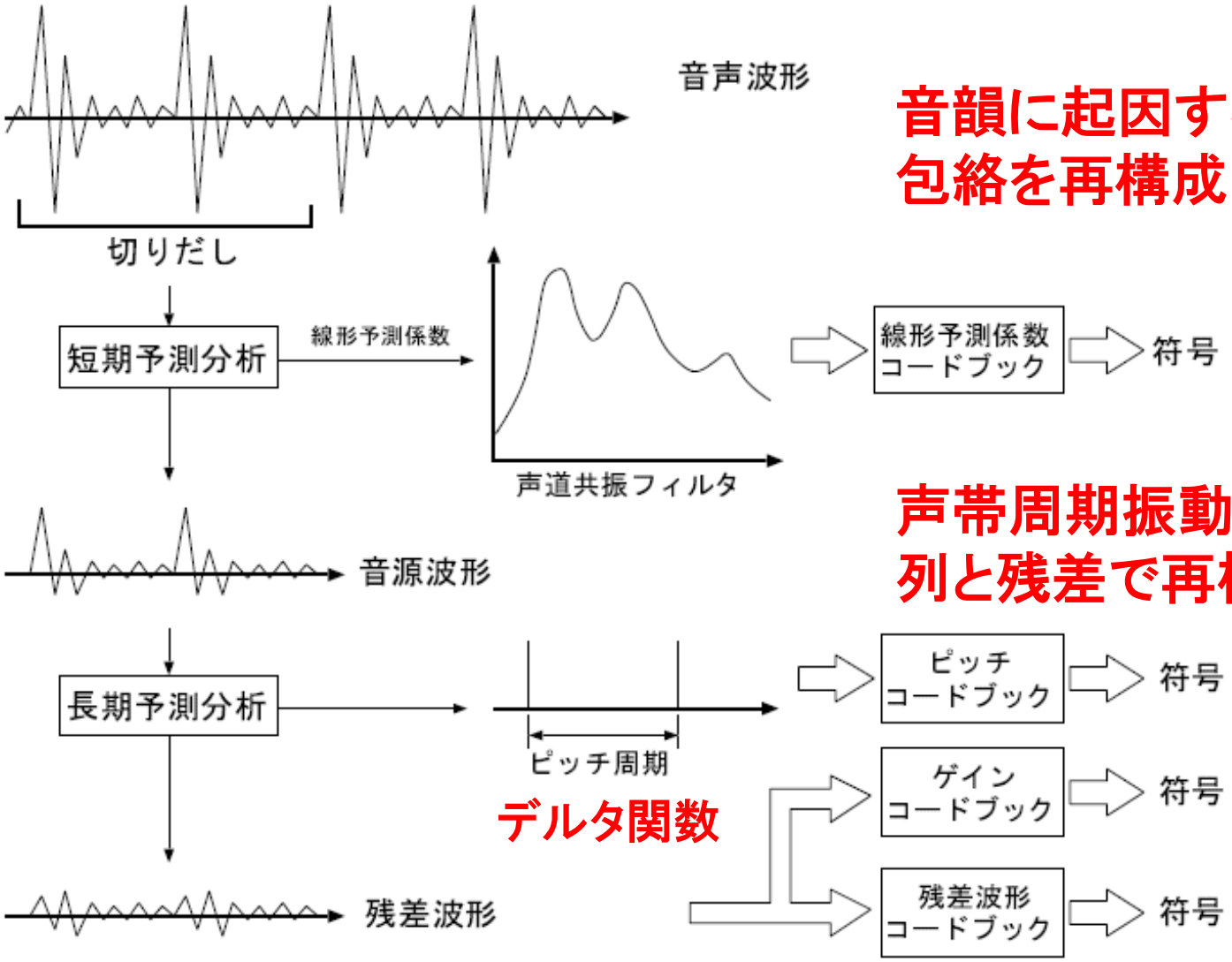
鼻音型



音声のスペクトル構造：分析例



音声情報圧縮(現在の携帯電話の基礎)



音韻に起因するスペクトル包絡を再構成

声帯周期振動をデルタ関数列と残差で再構成

図：CELP 方式の概念