

信号処理論第二 第4回 (10/16)

情報理工学系研究科システム情報学専攻
猿渡 洋

hiroshi_saruwatari@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

信号処理論第二 講義予定(金曜2眼)

- 9/25: 第1回
- 10/02: 第2回
- 10/09: 第3回
- 10/16: 第4回
- 10/23: 第5回
- 10/30: 第6回
- 11/06: 第7回
- 11/27: 第8回
- 12/04: 第9回
- 12/11: 第10回
- 12/18: 第11回
- 12/25: 第12回
- 1/08: 第13回
- 01/22: 期末試験(予定)

※2020年度は全て90分講義とする(10時25分～11時55分)

講義内容

- δ 関数再考
- δ 関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

講義資料と成績評価

■ 講義資料

- システム1研HP <http://www.sp.ipc.i.u-tokyo.ac.jp/>からダウンロードできるようにしてあります

■ 成績評価

- 学期末試験

前回の復習

■ 重畳積分定理

- $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega)$
- $f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$

■ Parsevalの定理

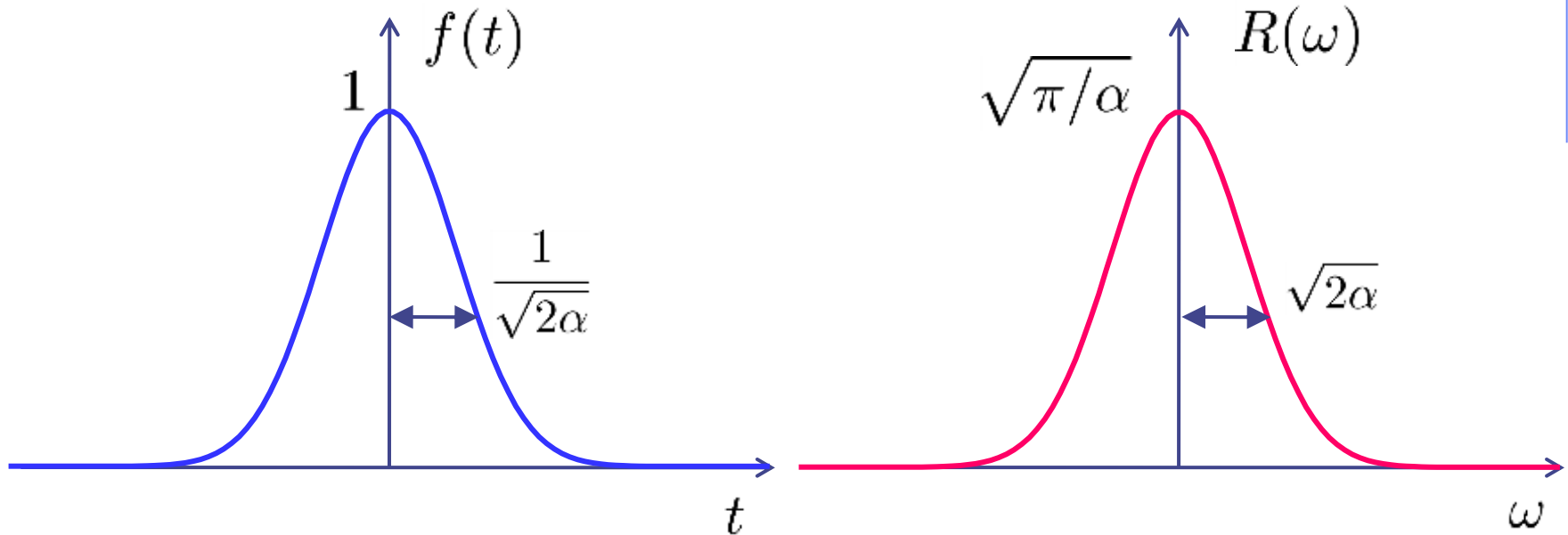
- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

■ 超関数・不連続関数を含む重要なFourier変換対

- 定数関数、 δ 関数
- 複素正弦波、 $\sin$ 、 $\cos$
- 矩形窓、三角窓、ガウス窓
- 周期 δ 関数

ガウス関数のFourier変換

■ $f(t) = e^{-\alpha t^2}$



$$e^{-\alpha t^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

ガウス関数のFourier変換の証明

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha}t + \frac{j\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha}} dt \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt}_{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}\end{aligned}$$

補足事項: ガウス関数の積分1

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ の証明}$$

求める積分値を I とおくと

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \text{ と表せるので、}$$

$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

ここで $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ とおけば、 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ だから

$$I^2 = \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{4}$$

前のページに関するメモ

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ のとき, ヤコビアンは

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

よって,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta.$$

最後の積分 $\int_0^\infty r e^{-r^2} dr$ は $s = -r^2$ という変数変換を用いて算出可能。
 $ds = -2r dr$ より

$$\int_0^\infty r e^{-r^2} dr = \int_{-\infty}^0 r e^s \frac{1}{-2r} ds = \frac{1}{-2} [e^s]_0^{-\infty} = \frac{1}{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}$$

補足事項: ガウス関数の積分2

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+jb)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \text{ の証明}$$

$f(z) = e^{-z^2}$ を図に示す四辺形にそって積分する.

$\oint e^{-z^2} dz$ を求める. ただし, $z = x + jy$ で,

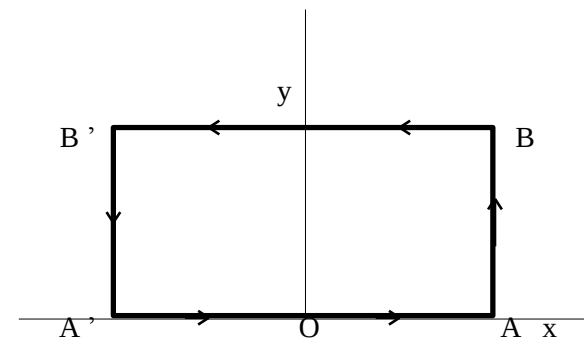
$OA = a, AB = b$ とする.

$A'A$ にそっては, $\int_{-a}^a e^{-x^2} dx$ であり,

AB にそっては, $j \int_0^b e^{-(a+jy)^2} dy$,

BB' にそっては, $\int_a^{-a} e^{-(x+jb)^2} dx$,

$B'A$ にそっては, $j \int_b^0 e^{-(-a+jy)^2} dy$ である.



第二, 第四の積分は,

$a \rightarrow \infty$ で 0 になる.

e^{-z^2} はこの変域で正則だから
一周積分は 0.

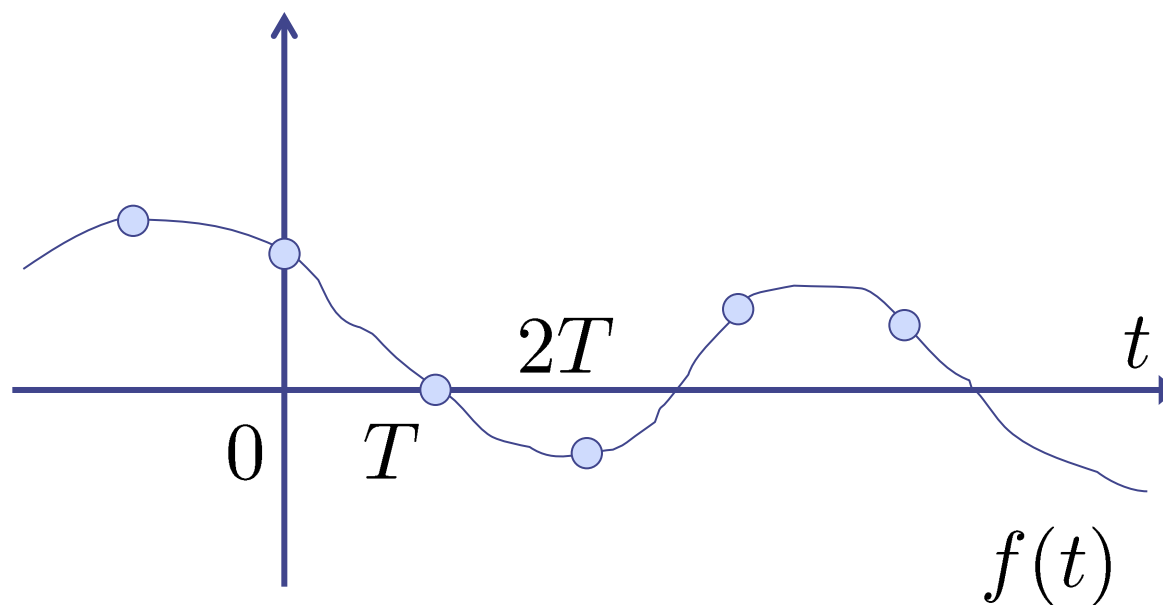
$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx + \int_{\infty}^{-\infty} e^{-(x+jb)^2} dx = 0$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+jb)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

サンプリング定理

連続関数を、サンプル値のみで表現できるか？

- 効用：連続系を離散系でシミュレートできる
- 明らかに、連続関数に何らかの制約条件が必要

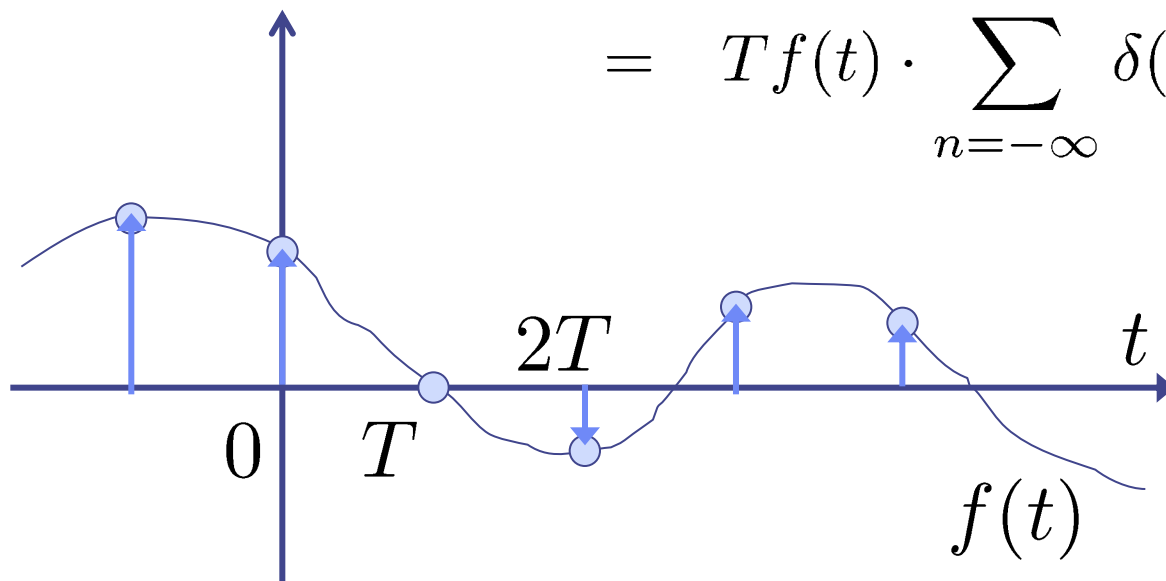


サンプリング定理

サンプル値系列をデルタ関数列とみなし、元の関数との関係を考える

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T f(nT) \delta(t - nT)$$

$$= T f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

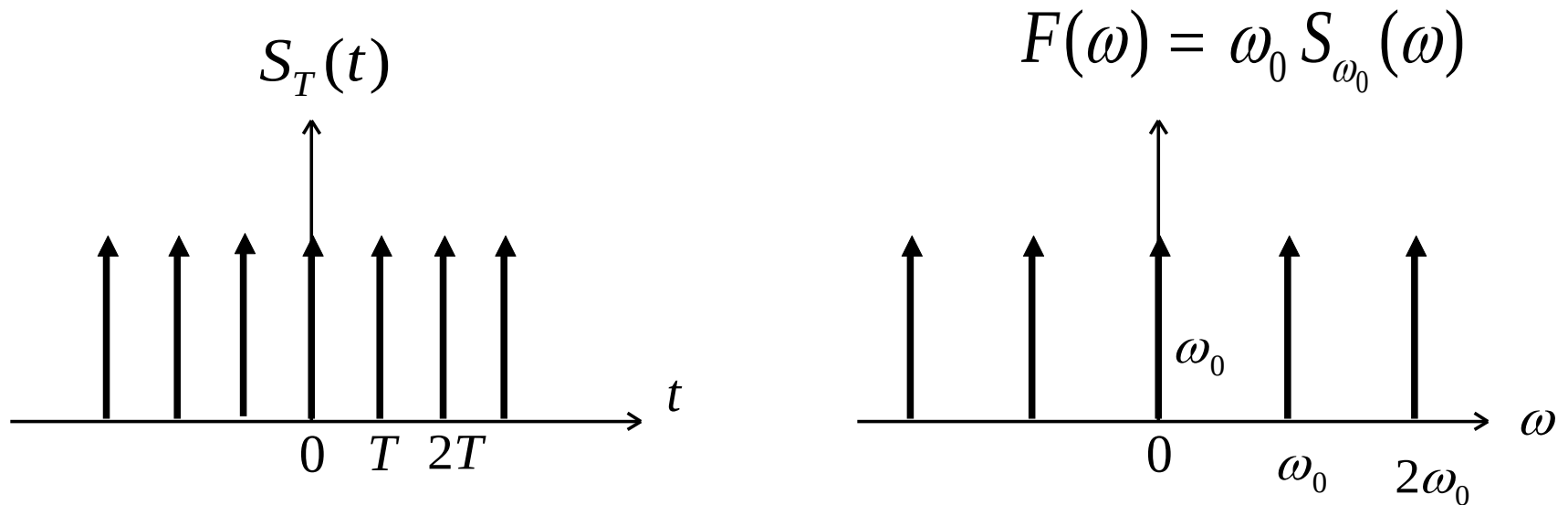


周波数領域の重畳定理

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \qquad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

周期 δ 関数のFourier変換



$$S_T(t) \leftrightarrow \omega_0 S_{\omega_0}(\omega)$$

$$\omega_0 = 2\pi / T$$

周期 δ 関数のFourier変換の証明1

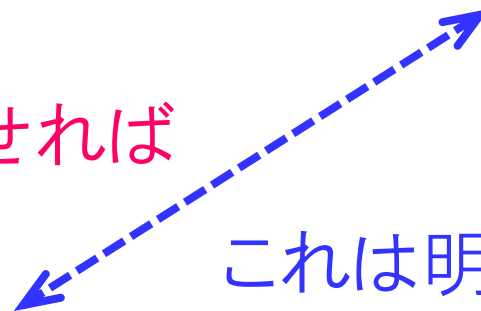
$$S_T(t) \longleftrightarrow \omega_0 S_{\omega_0}(\omega)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \qquad = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$



これを示せば

$$\stackrel{?}{=} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$



これは明らか

$$\because e^{jat} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - a)$$

周期 δ 関数のFourier変換の証明2

$$\begin{aligned} K_N(t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{jn\omega_0 t} \\ &= \frac{e^{j(N+1)\omega_0 t} - e^{-jN\omega_0 t}}{T(e^{j\omega_0 t} - 1)} \cdot \frac{e^{-\frac{j\omega_0 t}{2}}}{e^{-\frac{j\omega_0 t}{2}}} \\ &= \frac{e^{j(N+\frac{1}{2})\omega_0 t} - e^{-j(N+\frac{1}{2})\omega_0 t}}{T(e^{\frac{j\omega_0 t}{2}} - e^{-\frac{j\omega_0 t}{2}})} = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{T \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)} \end{aligned}$$

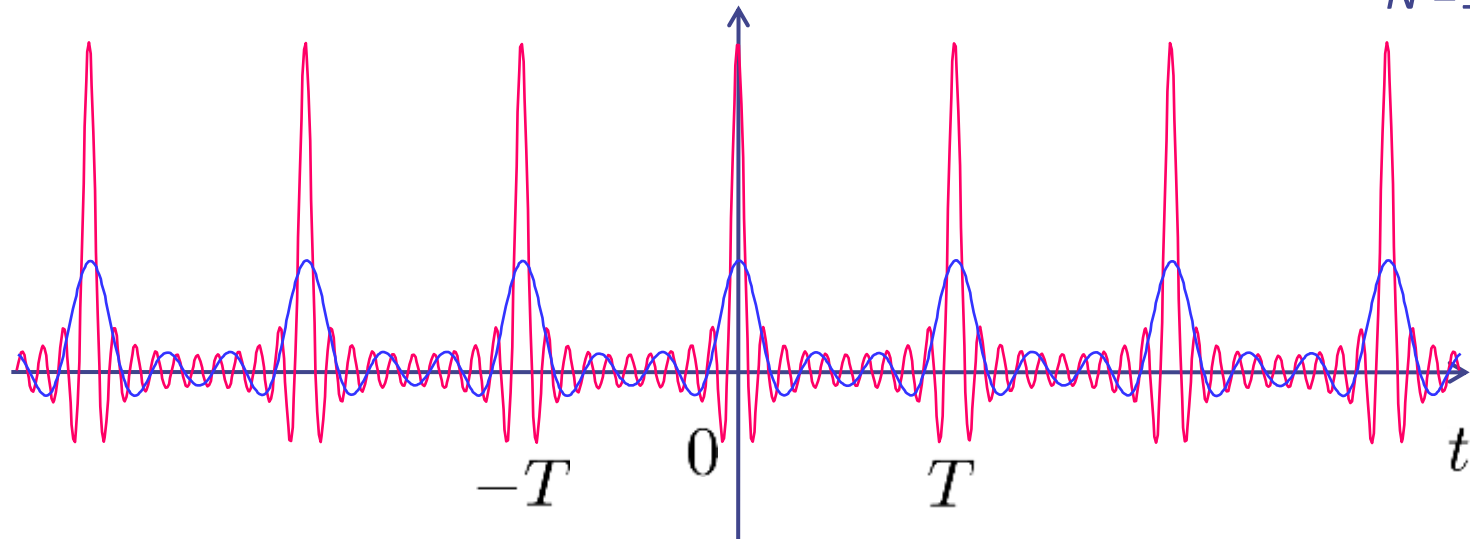
周期 δ 関数のFourier変換の証明3

$$K_N(t) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{T \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}$$

$$\text{周期 } T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} K_N(t) = 2N + 1$$

— $N = 3$
— $N = 10$



周期 δ 関数のFourier変換の証明4

区間 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ で $K_N(t) \rightarrow \delta(t)$ を示せば

$\lim_{N \rightarrow \infty} K_N(t) = S_T(t)$ が成立

$$K_N(t) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{T \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{Tt} \cdot \frac{t}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}$$

ここで, $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{Tt} = \frac{\pi}{T}\delta(t)$

$$\therefore \delta(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t}$$

周期 δ 関数のFourier変換の証明5

$\frac{t}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}$ は区間 $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ で有界

$|t| < \frac{T}{2}$ に対して $\frac{2}{\omega_0}$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} K_N(t) &= \frac{\pi}{T} \frac{t}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)} \delta(t) = \frac{\pi}{T} \left. \frac{t}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)} \right|_{t=0} \delta(t) \\ &= \delta(t) \end{aligned}$$

周期 δ 関数列を乗じた関数のFourier変換

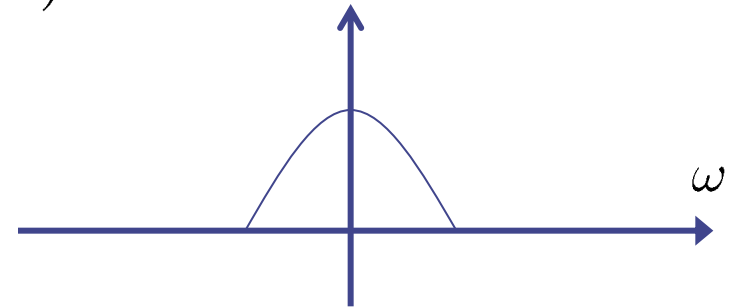
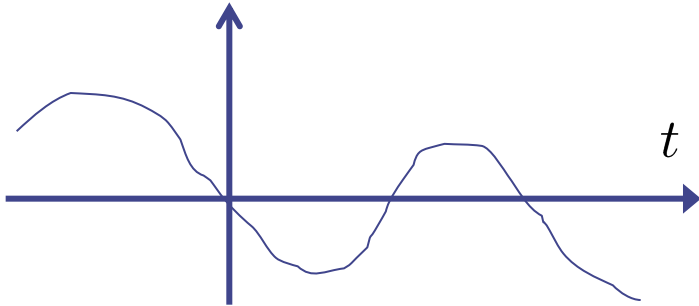
$$\tilde{f}(t) = T f(t) \underline{S_T(t)}$$

周期 δ 関数列

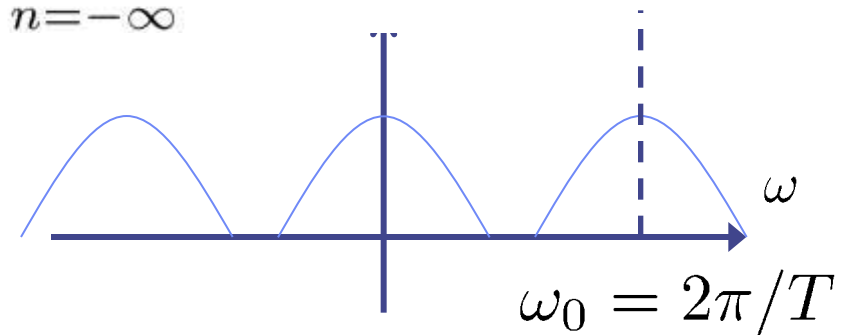
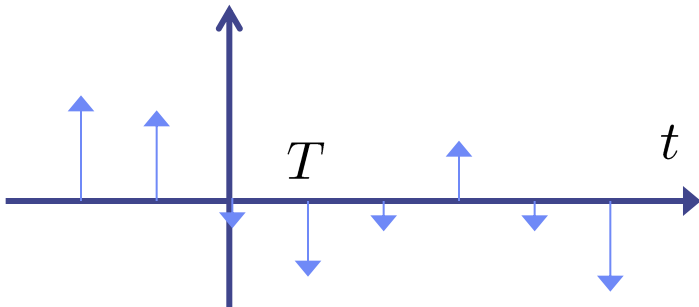
$$\begin{aligned}\tilde{F}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} T F(\omega) * \omega_0 S_{\omega_0}(\omega) \\ &= \frac{T}{2\pi} \omega_0 F(\omega) * S_{\omega_0}(\omega) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_0)\end{aligned}$$

周期 δ 関数列を乗じた関数のFourier変換

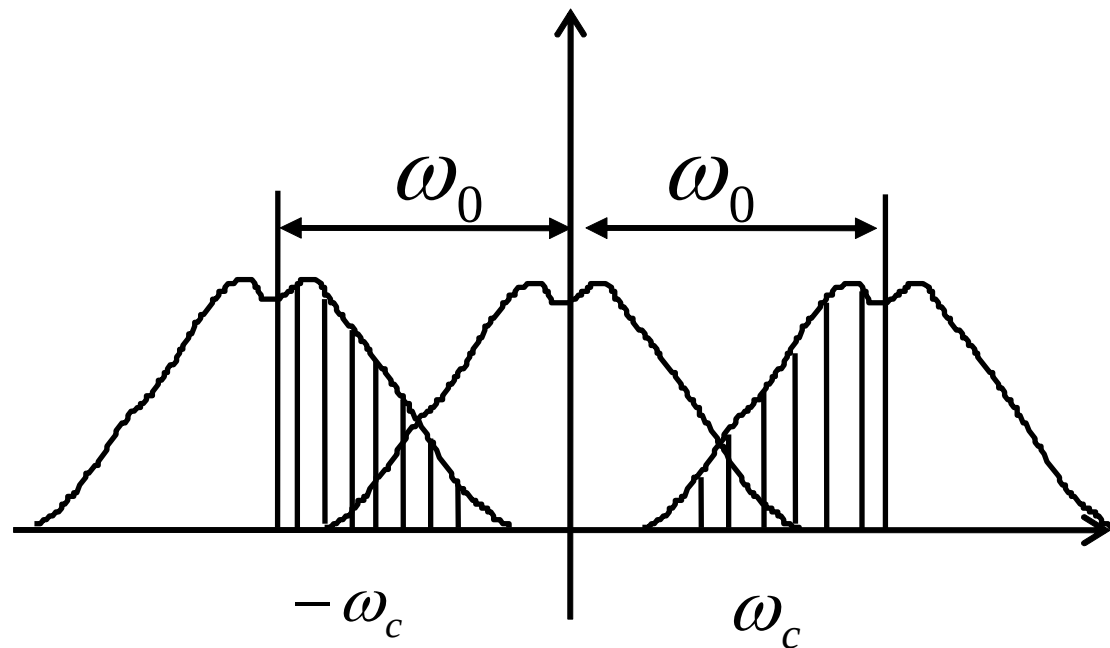
$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$



$$\tilde{f}(t) = T f(t) S_T(t) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_0)$$



エイリアシング (Aliasing)

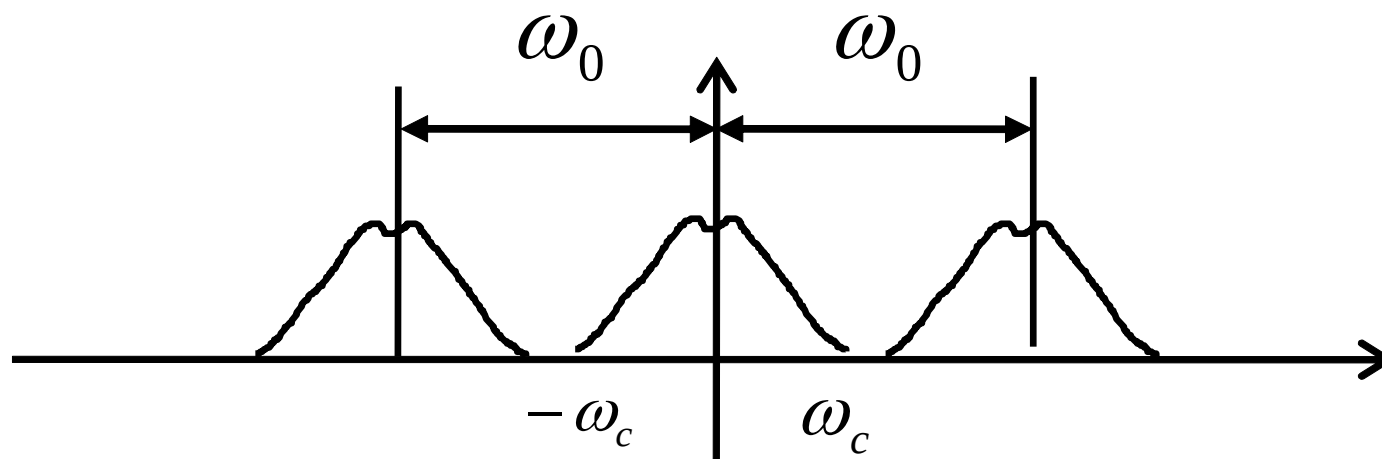


ω_c : 信号がもつ最大周波数 ($F(\omega) = 0$ for $|\omega| \geq \omega_c$)

ω_0 : サンプルング周波数

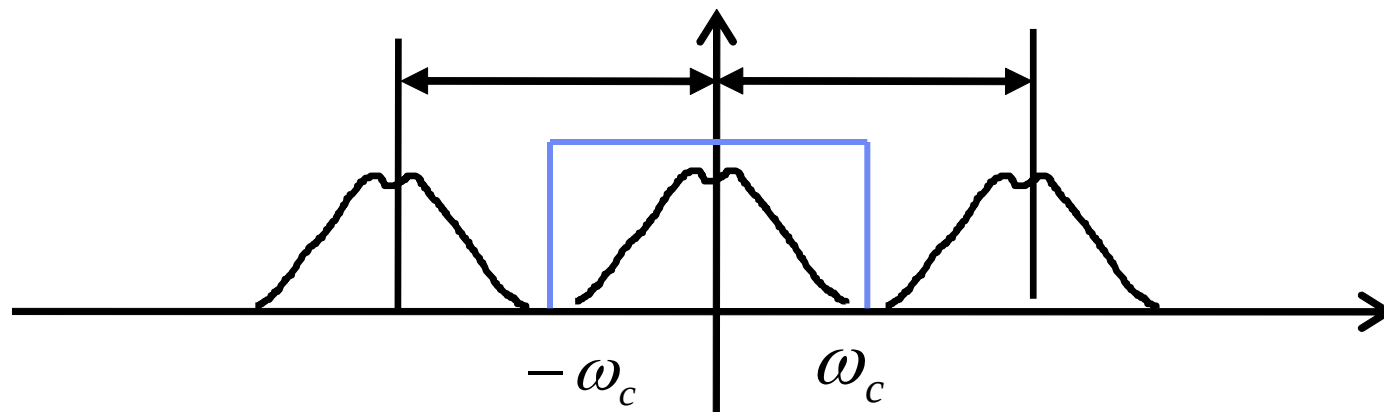
サンプルング周波数が低いと
折り返した成分がもとの成分に重なってしまう

エイリアシングを生じない条件



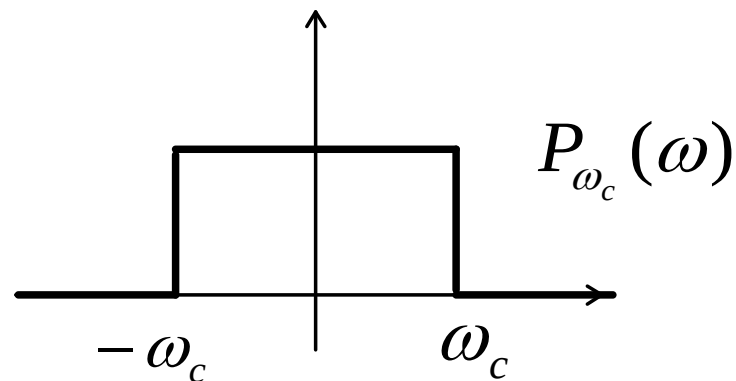
$$F(\omega) = 0 \text{ for } |\omega| \geq \omega_c \text{ のとき、}$$
$$\omega_0 \geq 2\omega_c$$

サンプル値系列からの信号の復元



$$\tilde{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_0)$$

$$F(\omega) = P_{\omega_c}(\omega) \tilde{F}(\omega)$$



アンチエイリアシングフィルタ

サンプル値系列からの信号の復元

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} * \tilde{f}(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} * \frac{\pi}{\omega_c} f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n\pi}{\omega_c}\right) \\ &= \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right) \delta\left(t - \frac{n\pi}{\omega_c}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c (t - \tau)}{\omega_c (t - \tau)} \delta\left(\tau - \frac{n\pi}{\omega_c}\right) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\sin \omega_c \left(t - \frac{n\pi}{\omega_c}\right)}{\omega_c \left(t - \frac{n\pi}{\omega_c}\right)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\sin(\omega_c t - n\pi)}{\omega_c t - n\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\sin \omega_c (t - nT)}{\omega_c (t - nT)} \end{aligned}$$

サンプリング定理から導かれる結論

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\sin \omega_c(t - nT)}{\omega_c(t - nT)}$$

帯域制限信号ならば、
カットオフ周波数の
2倍以上でサンプリングすれば
 f_n ($f(t)$ のサンプル値) から
元の $f(t)$ が完全に復元される。

代表的なサンプリングレート

■ $1/T = 2W$ [Hz]: ナイキストレート

(例1) 電話音声: $W = 4$ [kHz] $\Rightarrow T = 1/8000$ [s]

(例2) 通常音声: $W = 8$ [kHz] $\Rightarrow T = 1/16000$ [s]

:

(例2) 音楽信号: $W = 20$ [kHz] $\Rightarrow T = 1/40000$ [s]

(因みにCDは44100 [Hz]でサンプリングされている)

コーヒーブレイク: サンプルング定理を破ると？(1)

1979年、世界で初の「デジタルサンプリング」を基礎としたリズムマシンが発売され、大好評となった。

- 生のドラム音をデジタル記録して再現
- 解像度8 bit・少メモリーサイズのチープなサンプラー
- 開発者ロジャー・リンはサンプリング定理に反し、アンチエイリアシングフィルタをかけなかった



Linn Electronics LM-1 Drum Computer (1979)

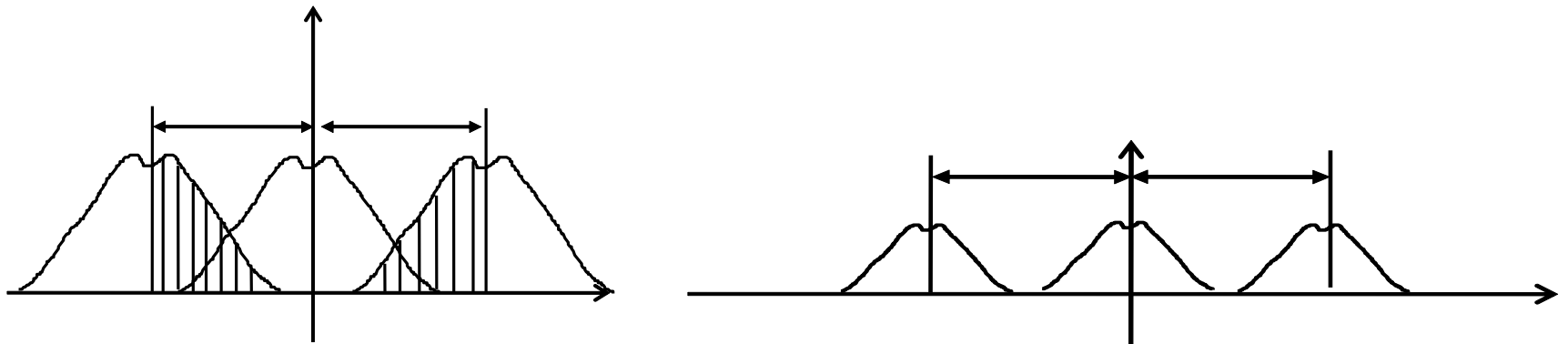


どうしてなのか？
どうなったのか？

コーヒースペイク: サンプルング定理を破ると？(1)

高い周波数に生じるスペクトル虚像によって、高域に多くの成分を有する「ギラギラした」音色になる。

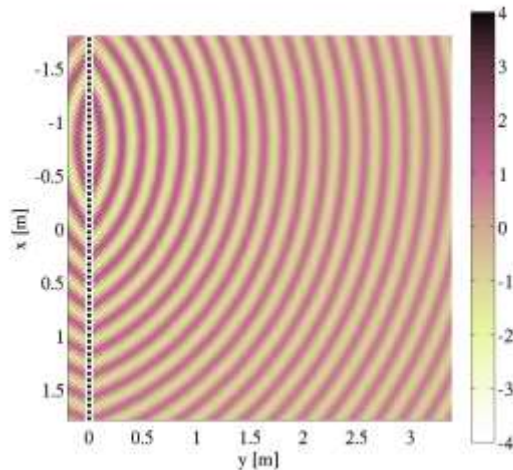
- 元の音を正確には再現していないが、ロジャーにはその方が「良い音」だと感じた。しかも、メモリの節約にもなるので、安く製造できるのも好都合。
- ミュージシャンもこの音を好んで使用した。80年代を代表する音となった(プリンス、マイケルジャクソン etc.)。
- 残念ながらこの後継機では、「正しいデジタル処理」を施したため、LM-1のギラギラ感が失われたと言われる。



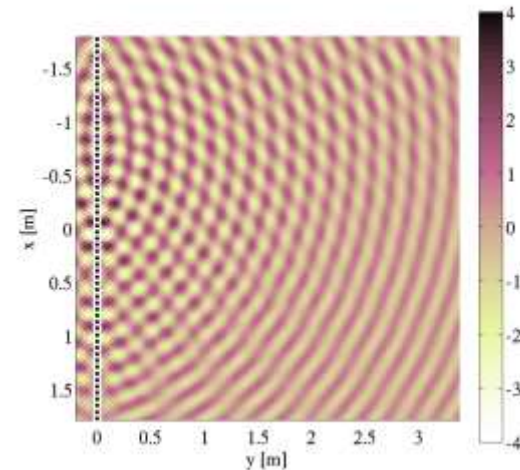
コーヒブレイク: サンプルング定理を破ると？(2)

スピーカレイによる音場再現

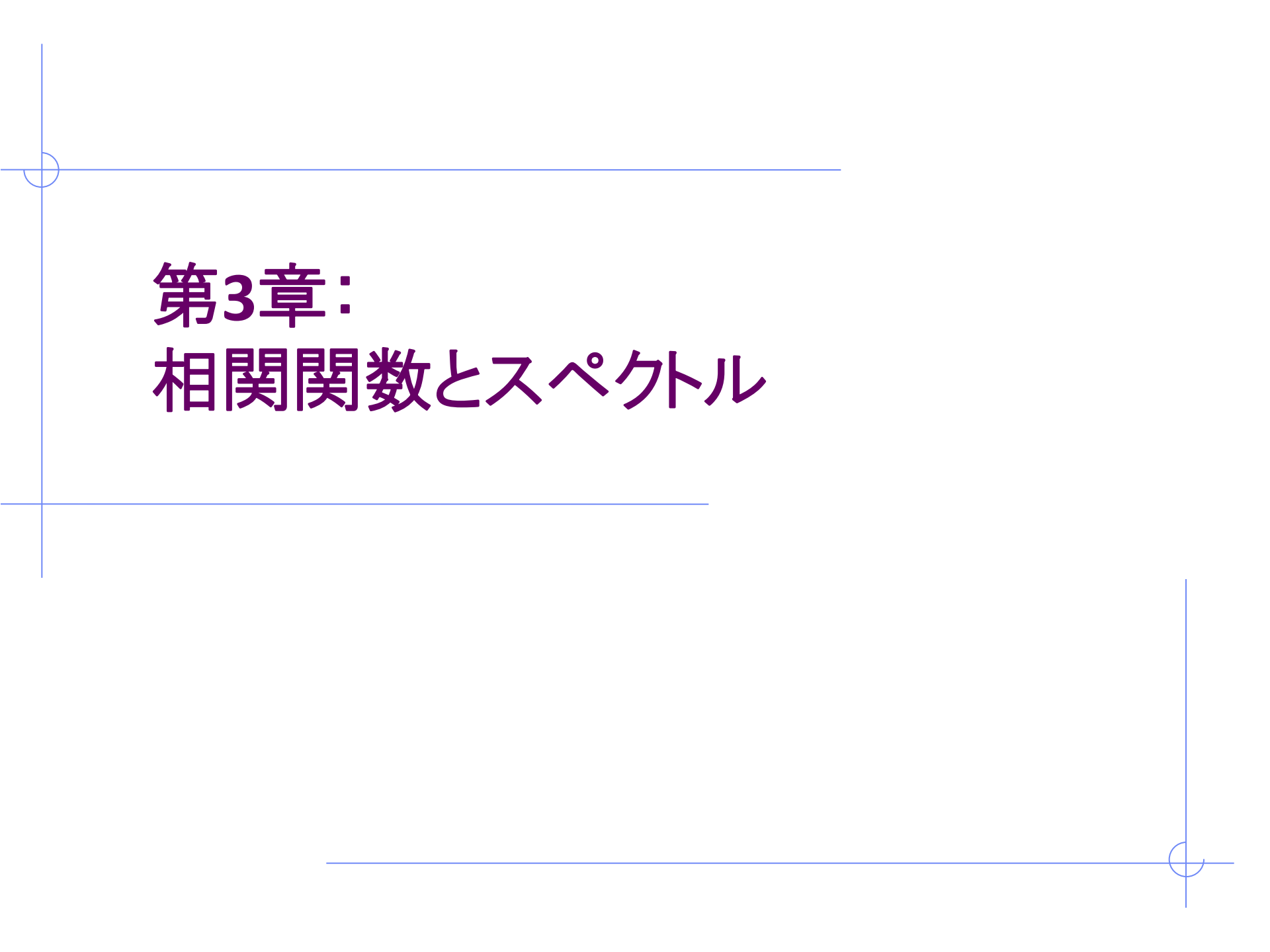
- 空間のサンプルングと解釈できる。ここではスピーカ位置がサンプル点である。
- 広いスピーカ間隔のレイ(疎レイ)では、ある高い周波数における波動を正しく再現することができない。
- 以下の例にあるように、エイリアシングの影響により「干渉縞」が生じてしまっていることが分かる。



密なスピーカレイによる再現



疎なスピーカレイによる再現



第3章： 相関関数とスペクトル

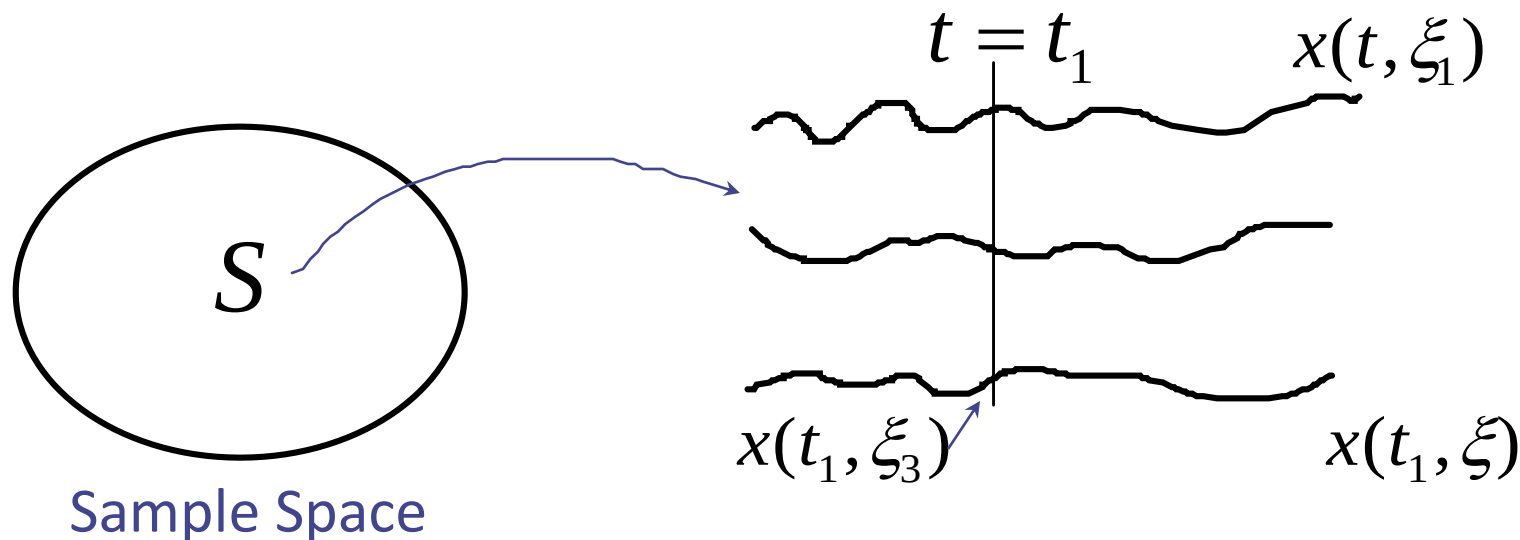
確定信号と不規則信号

■ 確定信号(deterministic signal)

- 時刻 t に対し値が一意に決定できる信号

■ 不規則信号(random signal, stochastic signal)

- 時刻 t における値が確率的にしか定まらない
(観測のたびに値が異なる)
- 平均、分散、分布などの統計量によりその性質がとらえられる



確率密度関数

■ 連続確率変数 x の確率密度関数: $f(x)$

■ 注意: $f(x)$ 自体は確率ではない

⇒ $f(x)$ は 1 以上の値をとることもありえる

◆ 例) ガウス分布

σ が小さい場合
1 より大きい値をとりうる

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

■ x が $x \sim x+dx$ の値をとる確率が $p(x)dx$

統計量の定義1

時刻tにおける確率変数x(t)の密度関数
という意味で、以後このように表記する

■ 集合平均 $\eta(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x; t) dx$

■ 自己相関関数 (auto-correlation)

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E[x(t_1)x(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

■ 自己共分散 (auto-covariance)

$$\begin{aligned} C(t_1, t_2) &= E[\{x(t_1) - \eta(t_1)\} \{x(t_2) - \eta(t_2)\}] \\ &= R(t_1, t_2) - \eta(t_1)\eta(t_2) \end{aligned}$$

統計量の定義2

- 相互相関関数 (cross-correlation)

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1)y(t_2)]$$

- 相互共分散 (cross-covariance)

$$\begin{aligned} C_{xy}(t_1, t_2) &= E[\{x(t_1) - \eta_x(t_1)\} \{y(t_2) - \eta_y(t_2)\}] \\ &= R_{xy}(t_1, t_2) - \eta_x(t_1)\eta_y(t_2) \end{aligned}$$

無相関と独立

- 無相関 (uncorrelated)

$$E[x(t_1)y(t_2)] = E[x(t_1)]E[y(t_2)]$$

- 独立 (independent)

$$f_{xy}(x, y; t_1, t_2) = f_x(x; t_1)f_y(y; t_2)$$

独立→無相関 は言えるが

無相関→独立 は必ずしも言えない

定常過程 (stationary process)

■ 強定常

- $x(t)$ と $x(t+\tau)$ が任意の τ に対して同一の確率密度分布を有する

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau) \text{ for } \forall \tau$$

■ 弱定常

- 平均が定数
- 自己相関関数が時間差のみの関数

$$E[x(t)] = \eta = \text{const}$$

$$E[x(t)x(t + \tau)] = R(\tau)$$

時間平均 (time mean)

■ 時間平均:

通常、定常な信号 $x(t)$ に対して
時間平均を考える

$$\mu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

$$\phi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x(t) dt$$

■ 集合平均($x(t)$ が定常な場合):

平均 $\eta = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

自己相関 $R(\tau) = E[x(t + \tau)x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2$

エルゴード性(ergodicity)

- 定常な確率過程 $x(t)$ において,
集合平均＝時間平均が成り立つとき,
「 $x(t)$ はエルゴード性をもつ」という
- 必ずしも「定常＝エルゴード性」とは限らない
- 定常でエルゴード的でない信号の例
 - 定数信号 $x(t)$, ただし $x(t)=\eta$ の値はある確率分布 $f(x)$ に従う
 - 時刻によらず等しい確率密度分布をもつ→定常
 - 標本信号の時間平均をとっても, 集合平均に一致しない
→エルゴード的でない
- 定常＋各時刻が独立ならば、必ずエルゴード的
 - i. i. d (independent and identically distributed)

相互相関関数

■ 相互相関(cross correlation)

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t + \tau)y(t)] = R_{yx}(-\tau)$$

■ 自己共分散(auto covariance)

$$c(\tau) = E[(x(t + \tau) - \eta)(x(t) - \eta)] = R(\tau) - \eta^2$$

■ 相互共分散(cross covariance)

$$c_{xy}(\tau) = E[(x(t + \tau) - \eta_x)(y(t) - \eta_y)] = R_{xy}(\tau) - \eta_x\eta_y$$

自己相関関数の性質

■ 偶関数: $R(\tau) = R(-\tau)$

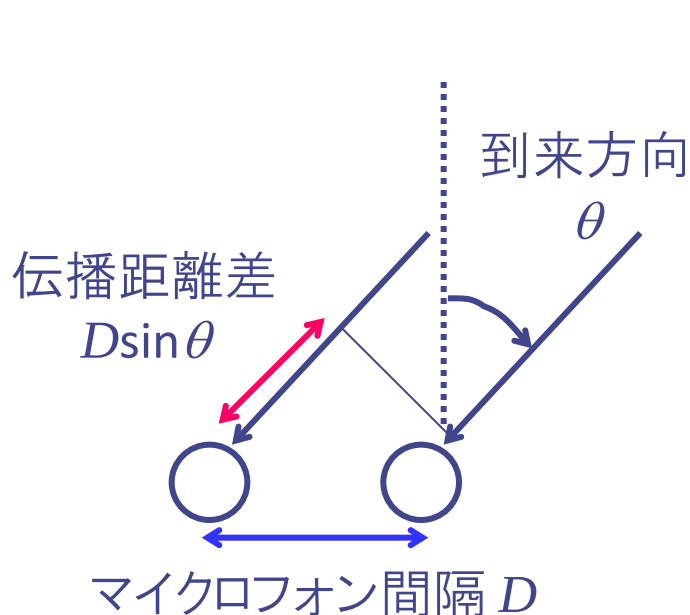
$$\begin{aligned}\because R(\tau) &= \mathbb{E}[x(t + \tau)x(t)] = \mathbb{E}[x(t)x(t - \tau)] = \mathbb{E}[x(t - \tau)x(t)] \\ &= R(-\tau)\end{aligned}$$

■ 原点で最大: $|R(\tau)| \leq R(0)$

$$\begin{aligned}\because & E[\{x(t + \tau) \pm x(t)\}^2] \\ &= E[x(t + \tau)^2] \pm E[x(t + \tau)x(t)] \\ &\quad \pm E[x(t)x(t + \tau)] + E[x(t)^2] \\ &= 2R(0) \pm 2R(\tau) \geq 0\end{aligned}$$

相互相関関数の応用例: 方位推定

- 2つのマイクロフォンに向かってある方向から音波が到来している。音波の到来方向を知りたい。
- 伝播時間差がわかれば方向がわかるが、どんな音波が到来してくるかわからない。



$$f_1(t) = x(t - \tau_0) + n_1(t)$$

$$f_2(t) = x(t) + n_2(t)$$

$$\tau_0 = D \sin \theta / c$$

c は音速

相互相関関数のピークを求めればよい

相互相関関数の応用例: 方位推定

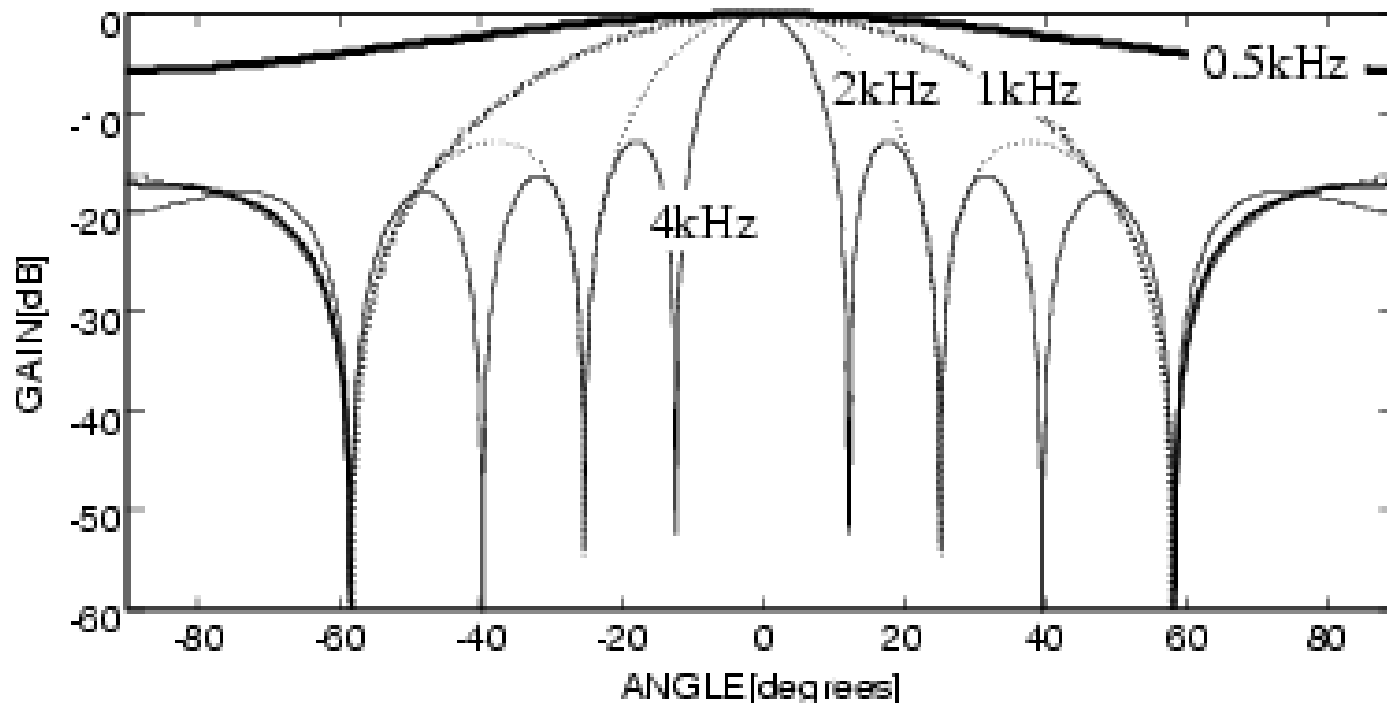
- $f_2(t)$ に対して $f_1(t)$ を $\tau = D \sin \theta_s / c$ だけずらし、それを加算したものの時間二乗平均を θ_s の関数としてプロット
→ これがなぜ相互相関となるのか？

$$E[\{f_1(t + \tau) + f_2(t)\}^2] = \underbrace{E[f_1(t + \tau)^2]}_{\tau \text{ によらない定数}} + \underbrace{E[f_2(t)^2]}_{\text{無相関なら0}} + 2E[f_1(t + \tau)f_2(t)]$$

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \mathbb{E}[f_1(t + \tau)f_2(t)] \\ &= \mathbb{E}[\{x(t - \tau_0 + \tau) + n_1(t + \tau)\}\{x(t) + n_2(t)\}] \\ &= \mathbb{E}[x(t - \tau_0 + \tau)x(t)] + \underbrace{\mathbb{E}[x(t - \tau_0 + \tau)n_2(t)]}_{\text{無相関なら0}} \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{E}[n_1(t + \tau)x(t)]}_{\text{無相関なら0}} + \underbrace{\mathbb{E}[n_1(t + \tau)n_2(t)]}_{\text{無相関なら0}} \\ &= \underbrace{R_{xx}(\tau - \tau_0)}_{\tau = \tau_0 \text{ でピークをとるので } \tau_0 \text{ 検出可能}} \end{aligned}$$

相互相関関数の応用例: 方位推定

- 真の音源方位は0度
- $f_2(t)$ に対して $f_1(t)$ を $\tau = D \sin \theta_s / c$ だけずらし、それを加算したものの時間二乗平均を θ_s の関数としてプロット
- 「遅延和アレー」処理と呼ばれる



相互相関関数の応用例 (2): SN比推定

■ 相互相関:

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \mathbb{E}[f_1(t + \tau)f_2(t)] \\ &= \mathbb{E}[\{x(t - \tau_0 + \tau) + n_1(t + \tau)\}\{x(t) + n_2(t)\}] \\ &= \mathbb{E}[x(t - \tau_0 + \tau)x(t)] + \mathbb{E}[x(t - \tau_0 + \tau)n_2(t)] \\ &\quad + \mathbb{E}[n_1(t + \tau)x(t)] + \mathbb{E}[n_1(t + \tau)n_2(t)] \\ &= \underline{R_{xx}(\tau - \tau_0)} \end{aligned}$$

無相関なら0

$\tau = \tau_0$ でピーク

■ 自己相関:

$$\begin{aligned} R_{11}(\tau) &= E[f_1(t + \tau)f_1(t)] \\ &= \underline{R_{xx}(\tau) + R_{n_1 n_1}(\tau)} \end{aligned}$$

$\tau = 0$ でピーク

- 雑音が0ならピーク値は等しい
- ピーク値の比でSN比がわかる