

信号処理論第二 第5回 (10/23)

情報理工学系研究科システム情報学専攻
猿渡 洋

hiroshi_saruwatari@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

信号処理論第二 講義予定(金曜2眼)

- 9/25: 第1回
- 10/02: 第2回
- 10/09: 第3回
- 10/16: 第4回
- 10/23: 第5回
- 10/30: 第6回
- 11/06: 第7回
- 11/27: 第8回
- 12/04: 第9回
- 12/11: 第10回
- 12/18: 第11回
- 12/25: 第12回
- 1/08: 第13回
- 01/22: 期末試験(予定)

※2020年度は全て90分講義とする(10時25分～11時55分)

講義内容

- δ 関数再考
- δ 関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

講義資料と成績評価

■ 講義資料

- システム1研HP <http://www.sp.ipc.i.u-tokyo.ac.jp/>
からダウンロードできるようにしてあります

■ 成績評価

- 学期末試験

前回の復習

■ 補足事項: ガウス積分

- $\int_0^\infty e^{-(x+jb)^2} dx = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ の証明

■ サンプリング定理

- エイリアシングがおきない条件: $\omega_0 \geq 2\omega_c$

ω_0 : サンプリング周波数

ω_c : 対象とする信号の最大周波数 ($F(\omega) = 0 \quad (|\omega| > \omega_c)$)

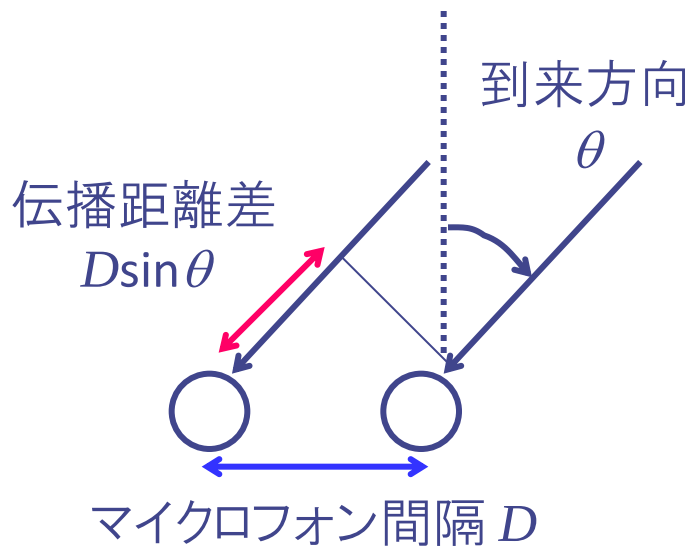
- 離散から連続の復元公式:
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\sin \omega_0(t - nT)}{\omega_0(t - nT)}$$

■ 不規則信号の導入

- 確率密度関数
- 集合平均、自己／相互相関、自己／相互共分散
- 強定常、弱定常、時間平均、エルゴード性

相互相関関数の応用例(1): 方位推定

- 2つのマイクロフォンに向かってある方向から音波が到来している。音波の到来方向を知りたい。
- 伝播時間差がわかれば方向がわかるが、どんな音波が到来してくるかわからない。



雑音

$$f_1(t) = x(t - \tau_0) + n_1(t)$$

$$f_2(t) = x(t) + n_2(t)$$

$$\tau_0 = D \sin \theta / c \quad c \text{は音速}$$

相互相関関数のピークを求めればよい

相互相関関数の応用例(1): 方位推定

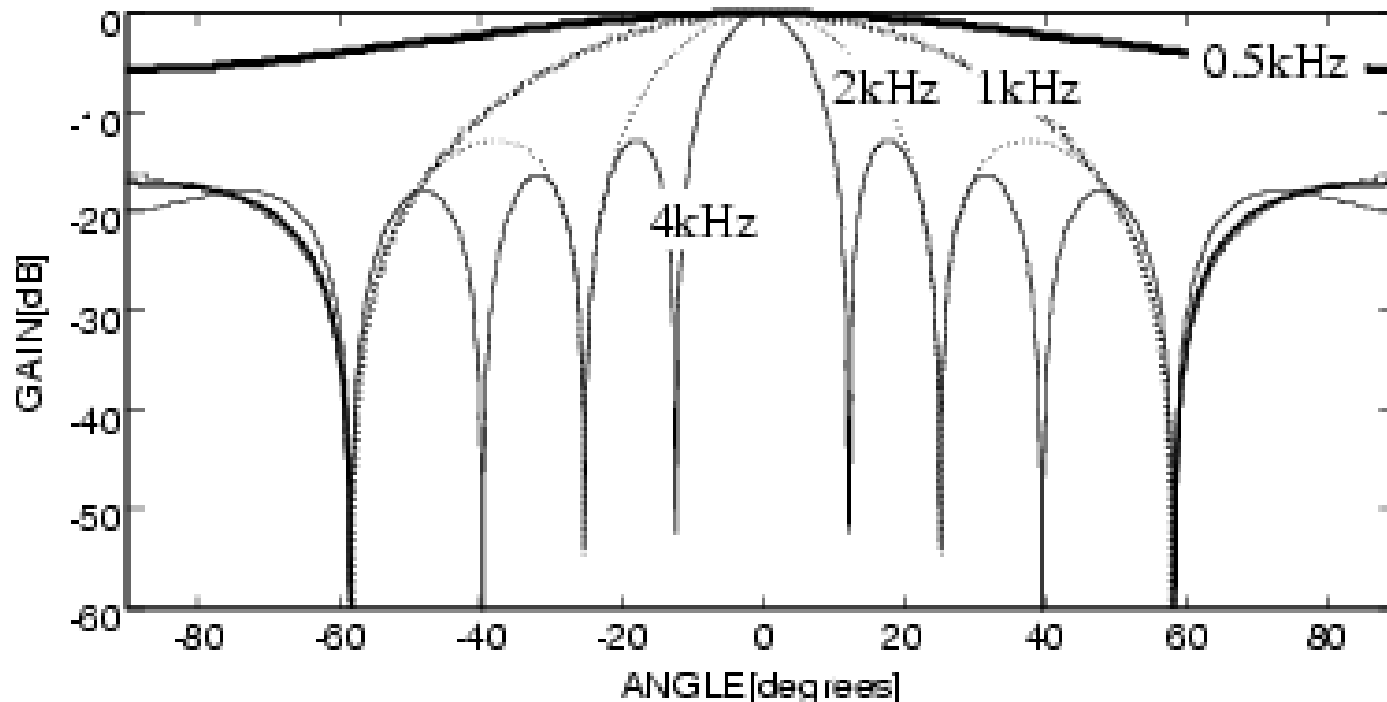
- $f_2(t)$ に対して $f_1(t)$ を $\tau = D \sin \theta_s / c$ だけずらし、それを加算したものの時間二乗平均を θ_s の関数としてプロット
→ これがなぜ相互相関となるのか？

$$E[\{f_1(t + \tau) + f_2(t)\}^2] = \underbrace{E[f_1(t + \tau)^2]}_{\tau \text{ によらない定数}} + \underbrace{E[f_2(t)^2]}_{\text{無相関なら0}} + 2E[f_1(t + \tau)f_2(t)]$$

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \mathbb{E}[f_1(t + \tau)f_2(t)] \\ &= \mathbb{E}[\{x(t - \tau_0 + \tau) + n_1(t + \tau)\}\{x(t) + n_2(t)\}] \\ &= \mathbb{E}[x(t - \tau_0 + \tau)x(t)] + \underbrace{\mathbb{E}[x(t - \tau_0 + \tau)n_2(t)]}_{\text{無相関なら0}} \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{E}[n_1(t + \tau)x(t)]}_{\text{無相関なら0}} + \underbrace{\mathbb{E}[n_1(t + \tau)n_2(t)]}_{\text{無相関なら0}} \\ &= \underbrace{R_{xx}(\tau - \tau_0)}_{\tau = \tau_0 \text{ でピークをとるので } \tau_0 \text{ 検出可能}} \end{aligned}$$

相互相関関数の応用例(1): 方位推定

- 真の音源方位は0度
- $f_2(t)$ に対して $f_1(t)$ を $\tau = D \sin \theta_s / c$ だけずらし、それを加算したものの時間二乗平均を θ_s の関数としてプロット
- 「遅延和アレー」処理と呼ばれる



相互相関関数の応用例(2): SN比推定

■ 相互相関:

$$\begin{aligned}
 R_{12}(\tau) &= \mathbb{E}[f_1(t + \tau)f_2(t)] \\
 &= \mathbb{E}[\{x(t - \tau_0 + \tau) + n_1(t + \tau)\}\{x(t) + n_2(t)\}] \\
 &= \mathbb{E}[x(t - \tau_0 + \tau)x(t)] + \mathbb{E}[x(t - \tau_0 + \tau)n_2(t)] \\
 &\quad + \mathbb{E}[n_1(t + \tau)x(t)] + \mathbb{E}[n_1(t + \tau)n_2(t)] \\
 &= \underline{R_{xx}(\tau - \tau_0)} \qquad \text{無相関なら0}
 \end{aligned}$$

$\tau = \tau_0$ でピーク

■ 自己相関:

$$\begin{aligned}
 R_{11}(\tau) &= E[f_1(t + \tau)f_1(t)] \\
 &= \underline{R_{xx}(\tau) + R_{n_1 n_1}(\tau)} \\
 &\qquad \tau = 0 \text{でピーク}
 \end{aligned}$$

- 雑音が0ならピーク値は等しい
- ピーク値の比でSN比がわかる

信号のエネルギーとエネルギースペクトル

■ Parsevalの定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

■ 左辺は信号の全エネルギー

■ 右辺の $\Phi(\omega) = |X(\omega)|^2 / 2\pi$

- エネルギースペクトル (energy spectrum)
- 単位角周波数あたりのエネルギーを表わす
- エネルギーが有限な信号 $x(t)$ に対して意味をもつ

定常不規則信号とパワースペクトル

- 定常な不規則信号は無限のエネルギーをもつ
→ エネルギースペクトルを考えることができない
- そこで信号の単位時間あたりのエネルギー
(パワー)を考え、**パワースペクトル(power spectrum)**を定義する

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T \leq t \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

$$\Phi_T(\omega) = \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T} \quad X_T(\omega) \text{ は } x_T(t) \text{ の Fourier 変換}$$

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E[\Phi_T(\omega)]$$

ウィーナーヒンチンの定理 (1/1)

- $\Phi_T(\omega)$ は標本信号 $x(t)$ 毎に求まるので
その集合平均（期待値）を考える

$$\begin{aligned} E[\Phi_T(\omega)] &= E \left[\frac{1}{2T} |X_T(\omega)|^2 \right] \\ &= E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 \int_{-T}^T x(t_2)^* e^{j\omega t_2} dt_2 \right] \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E[x(t_1) x(t_2)^*] e^{-j\omega(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R(t_1 - t_2) e^{-j\omega(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

ウィーナーヒンチンの定理 (2/2)

$\tau = t_1 - t_2$, $\lambda = t_1$ とすれば

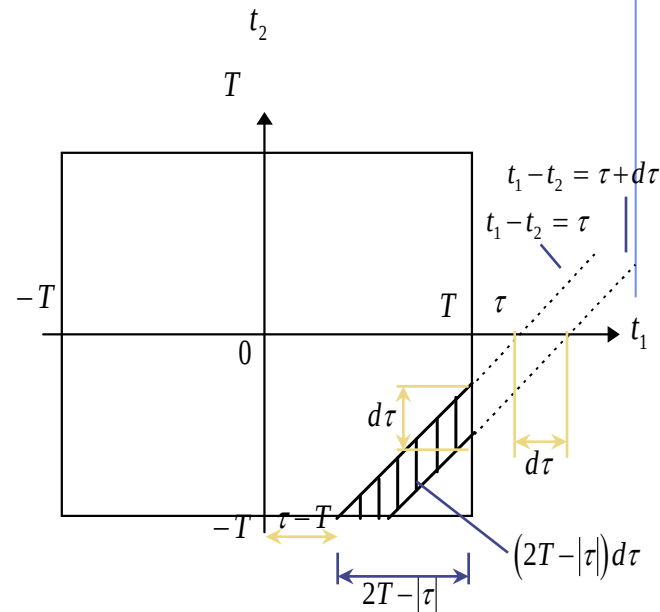
$$E[\Phi_T(\omega)] = \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} (2T - |\tau|) R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \int_{-2T}^{2T} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau - \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} |\tau| R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$\int_{-\infty}^{\infty} |\tau R(\tau)| d\tau < \infty$ ならば

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[\Phi_T(\omega)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-2T}^{2T} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$



パワースペクトルは
自己相関関数の
Fourier変換

パワースペクトルの実数値性

一般に $x(t)$ が複素数であり

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t + \tau)x^*(t)]$$

のとき、 $R(-\tau) = R^*(\tau)$ であるから、 $S(\omega)$ は実関数

$$\begin{aligned} S^*(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R^*(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R(-\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= S(\omega) \end{aligned}$$

パワースペクトルの非負値性

- $\tau = 0$ とすれば

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = R(0) = \mathbb{E}[|x(t)|^2] \geq 0$$

- よって $S(\omega) \geq 0$

- もし $S(\omega) < 0$ となる ω があればそこだけを切り出すフィルタにより

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega) d\omega < 0$$

となるようなパワースペクトル $\tilde{S}(\omega)$ が作れてしまい、
上記の性質に反する

クロススペクトル (cross spectrum)

- 定常確率過程のクロススペクトル密度：
相互相関関数のFourier変換

$$\begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= S_{yx}^*(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E[x(t + \tau)y^*(t)] \\ R_{xy}(\tau) &= R_{yx}^*(-\tau) \end{aligned}$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

クロススペクトルによる伝達系推定

- 信号 $x(t)$ が線形時不変な未知系（そのインパルス応答を $h(t)$ とする）を経て観測された時、それを $y(t)$ とおく。
- クロススペクトルを用いて表すと

$$\begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= S_{yx}^*(\omega) \\ &= H(\omega) S_{xx}(\omega) \end{aligned}$$

入力信号のパワースペクトルと伝達関数の積



入力信号パワースペクトルが「白色」なものを選べば
伝達関数の推定が可能となる。

クロススペクトルによる伝達系推定(証明)

$$\begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) R_{xx}(\tau - \eta) e^{-j\omega\tau} d\eta d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [h(\eta) e^{-j\omega\eta}] R_{xx}(\sigma) e^{-j\omega\sigma} d\eta d\sigma \quad (\tau - \eta = \sigma) \\ &= H(\omega) S_{xx}(\omega) \end{aligned}$$

注意:

$S_{yy}(\omega)/S_{xx}(\omega)$ では伝達関数は求まらない。

なぜなら $S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega)$

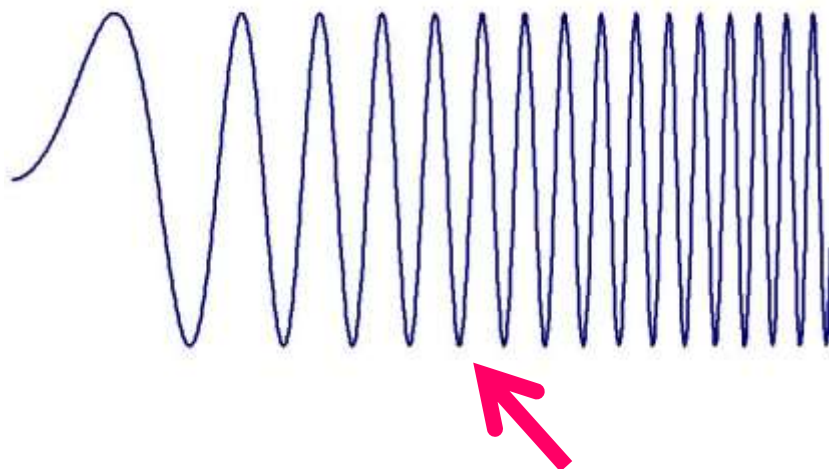
クロススペクトルによる伝達系推定

入力信号パワースペクトルが「白色」なものを選べば
伝達関数の推定が可能となる。⇒ 例えばどのようなもの？

例1：単位インパルス

例2：十分に長い白色ガウス系列

例3：チャープ信号(FM変調正弦波)



低い周波数から高い周波数までの正弦波が連続的に等しい量で含まれている

窓関数

- ある有限区間以外で0となる, 通常正值をとる関数

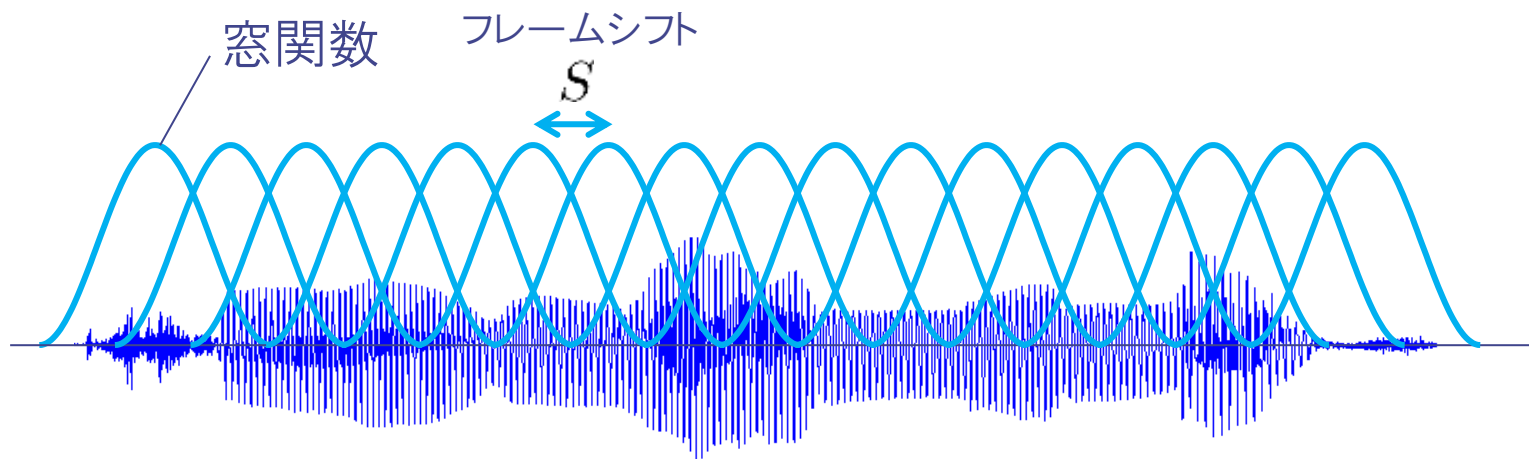
$$\text{data window } B(t) \begin{cases} > 0 & (-T \leq t \leq T) \\ = 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

- 信号を有限区間切り出し, 分析するのに用いられる
 - 非定常な信号の場合でも、短い時間区間では定常とみなせる場合が多い

$$\hat{x}(t) = x(t)B(t)$$

短時間Fourier変換(窓関数の応用)

- 文字通り, 信号を短時間ごとに窓掛けして, Fourier変換する処理



- 式で書くと...

$$X_{\text{STFT}}(\omega, mS) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{w(t)x(t + mS)} e^{-j\omega t} dt$$

m 番目の窓で
切り出された波形

参考：音声信号のスペクトログラム分析(1)

■ 時間波形 $x(n)$ における短時間フーリエ変換

■ 利点:

- ◆ 比較的定常な部分の静的な特徴を見ることが可能
(例)定常母音/a/の特徴を見る

■ 欠点:

- ◆ 音声が定常と見なせるのはせいぜい40 ms程度まで
- ◆ 音声波形全体がどのように変化していったのかを見ることは出来ない。

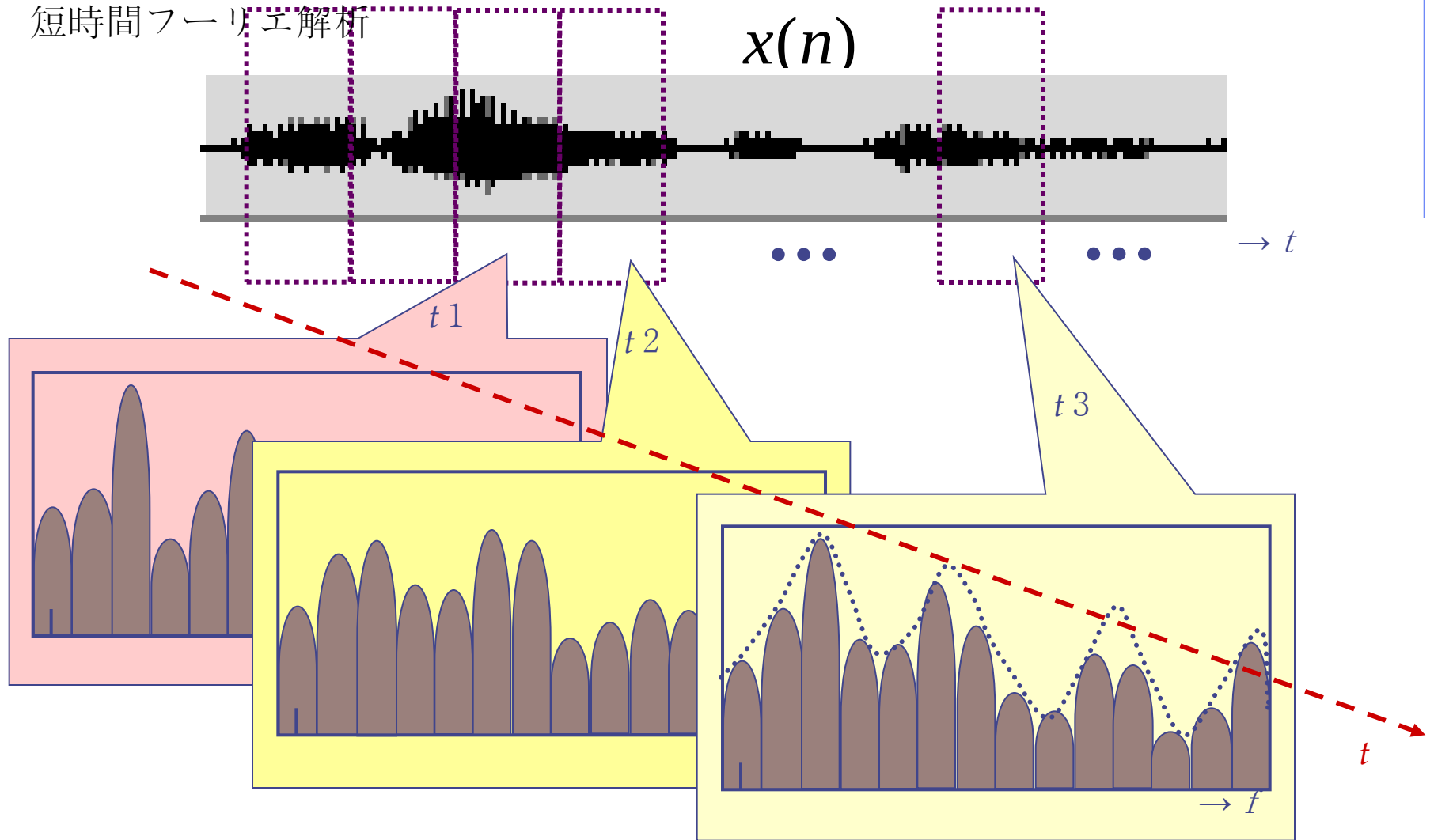
⇒解決策:

フーリエ変換による短時間スペクトル分析を時間軸方向に連続して実行し、それらを「時間一周波数領域」へ2次元表示

この表示はサウンドスペクトログラムとよばれる

参考：音声信号のスペクトログラム分析(2)

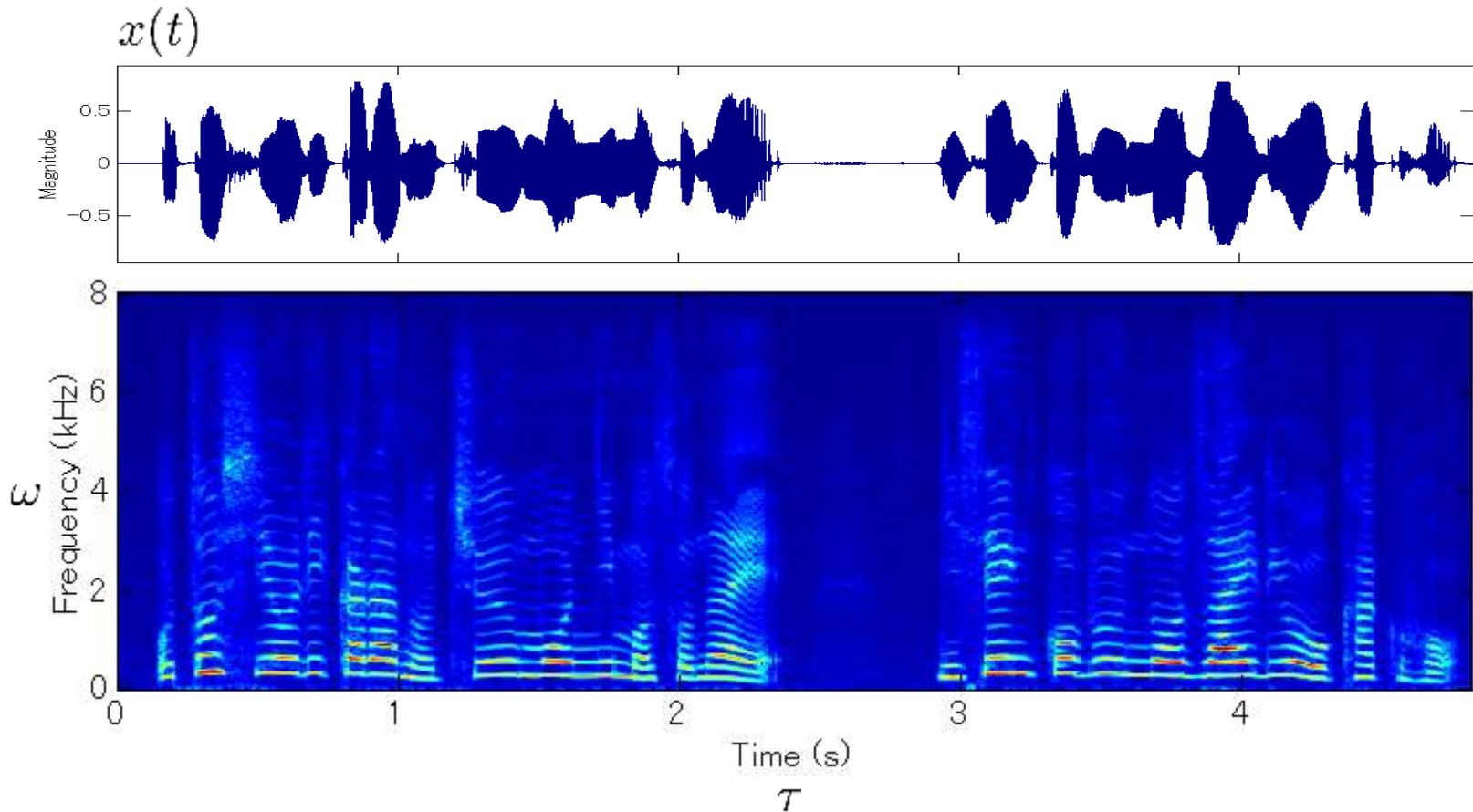
短時間フーリエ解析



時間 t と周波数 f の2次元（濃淡）表示を行う

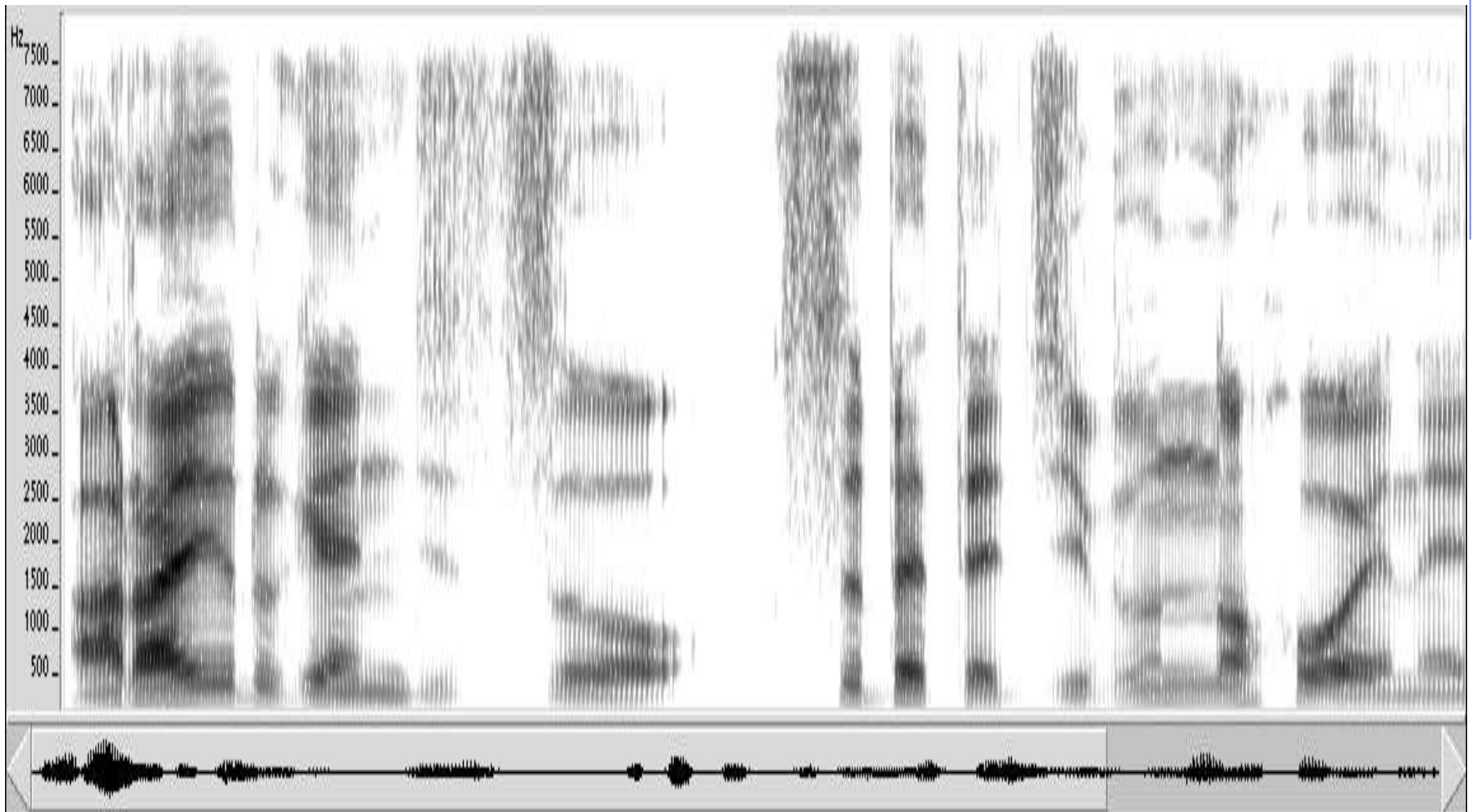
参考：音声信号のスペクトログラム分析(3)

■ $|X_{\text{STFT}}(\omega, \tau)|$ をカラーマップ表示してみる



細かい「横スジ」の時間的な変化が分かる

参考：音声信号のスペクトログラム分析(4)



前ページのものとは何が異なるのか？
⇒細かい「縦スジ」の突発的な変化が分かる

参考：窓分析における時間-周波数解像度

■ 周波数分解能と時間分解能間のトレードオフ

⇒より細かく周波数成分をみようとする

⇒フーリエ変換における時間長を大きくする

⇒サウンドスペクトログラムの時間分解能が荒くなる

■ 広帯域分析と狭帯域分析

■ 広帯域分析：

- ◆ 周波数分解能300 Hz, 時間分解能 3 ms

スペクトル上の周期性はぼやけるが、時間方向の細かな変動は表現可能

■ 狭帯域分析：

- ◆ 周波数分解能45 Hz, 時間分解能 22 ms

時間方向の細かな変動はぼやけるが、スペクトル上の周期性は表現可能

窓関数の効果1

- 窓関数をかけることによる自己相関関数の変化:

$$\phi_T(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)B(t)x(t+\tau)B(t+\tau)dt$$

$$E[\phi_T(\tau)] = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} E[x(t)x(t+\tau)]B(t)B(t+\tau)dt$$

$$= R(\tau) \cdot \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} B(t)B(t+\tau)dt$$

$$= R(\tau) \underline{D(\tau)}$$

lag window

- lag windowが乗じられる

窓関数の効果2

- 窓関数をかけることによるパワースペクトルの変化:

$$E[\phi_T(\tau)] = R(\tau)D(\tau)$$

 Fourier変換

$$E[\Phi_T(\omega)] = \frac{1}{2\pi} S(\omega) * Q(\omega)$$

$$\underline{Q(\omega)} = F[D(\tau)]$$

spectral window

- spectral windowが畳み込まれる

各ドメインでの窓関数の関係

data window

$$B(t)$$

(時間領域)

Fourier変換

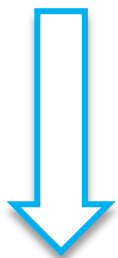


frequency window

$$J(\omega) = F[B(t)]$$

(周波数領域)

自己相関



lag window

$$D(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} B(t)B(t + \tau)dt$$

(自己相関領域)

Fourier変換



spectral window

$$Q(\omega) = F[D(\tau)] = \frac{1}{2\pi} |J(\omega)|^2$$

(パワースペクトル領域)

絶対値二乗



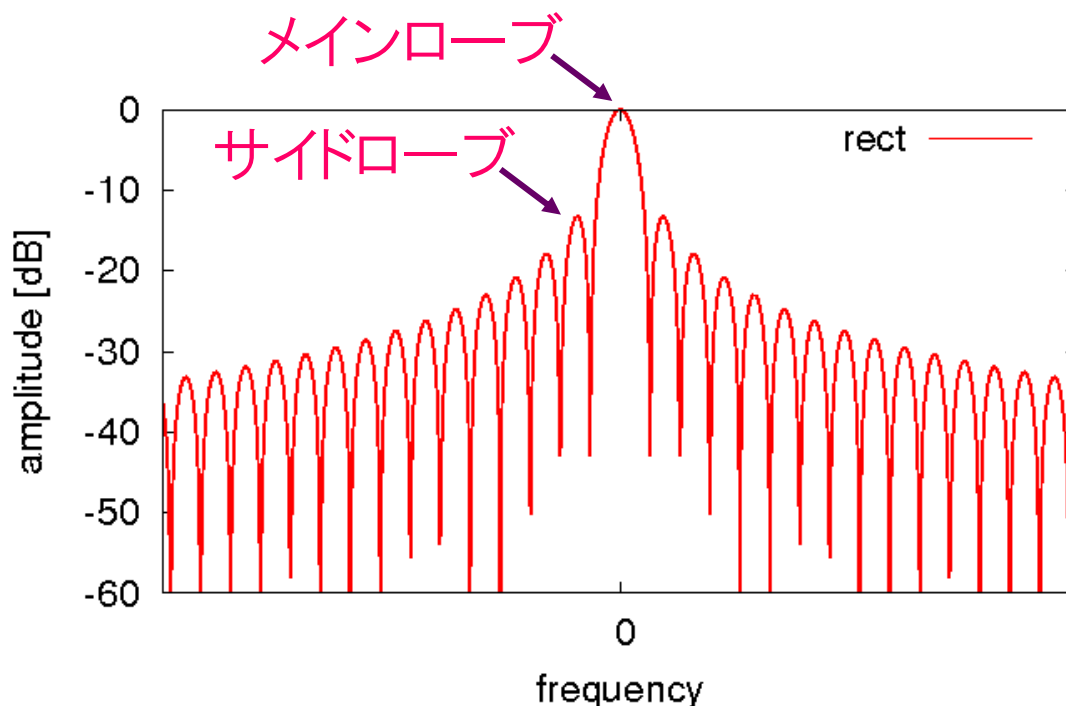
様々な窓関数

■ 窓関数の重要な特性

- **メインローブの幅**(周波数分解能): 狭いほどよい
- **サイドローブの大きさ**(ダイナミックレンジ): 小さいほどよい
- しかし両者は同時に成立しない⇒設計により様々なvariation

■ 代表的な窓関数

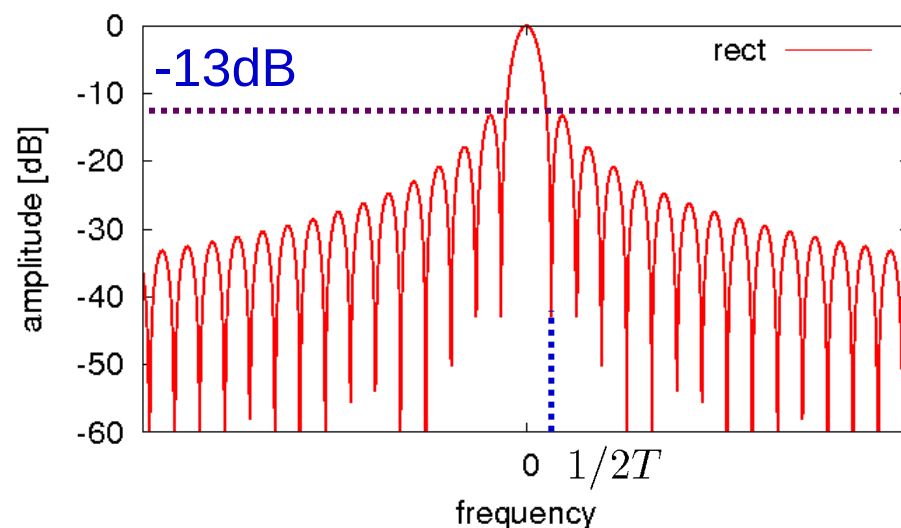
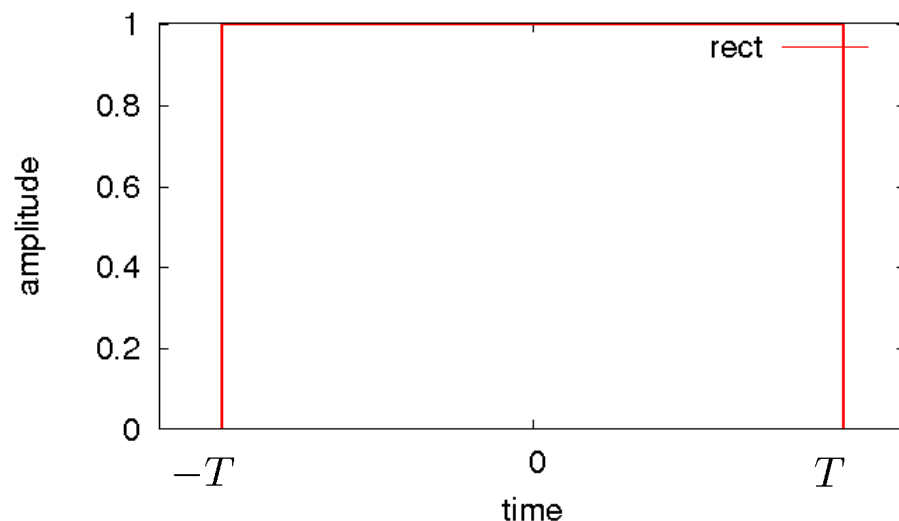
- 矩形窓
- 三角窓(Bartlett窓)
- Hanning窓
- Hamming窓
- Blackmann窓
- Dolph-Chebyshev窓



矩形窓 (aka Rectangular or Do-Nothing window)

$$B(t) = \begin{cases} 1 & (|t| < T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

- 方形窓、Dirichlet窓とも呼ばれる
- メインローブの幅は窓関数中最も狭い
- サイドローブの最大値は-13dBと大きい



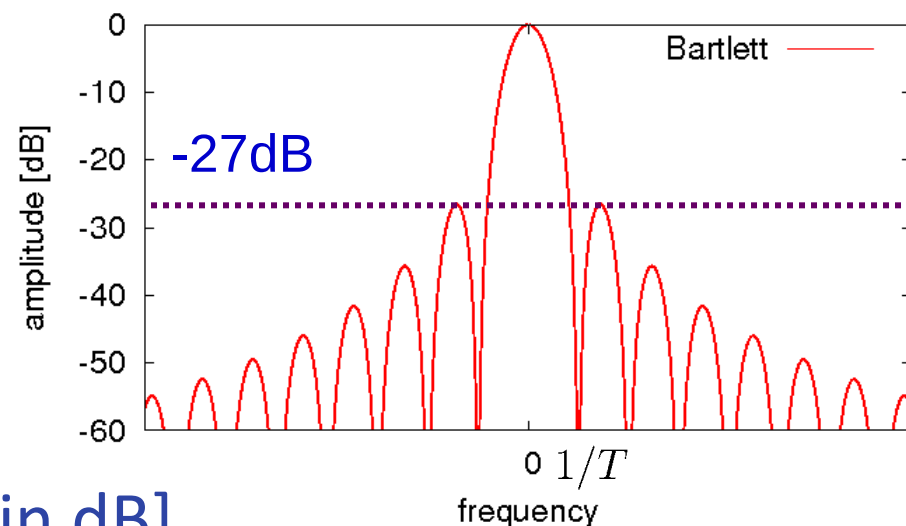
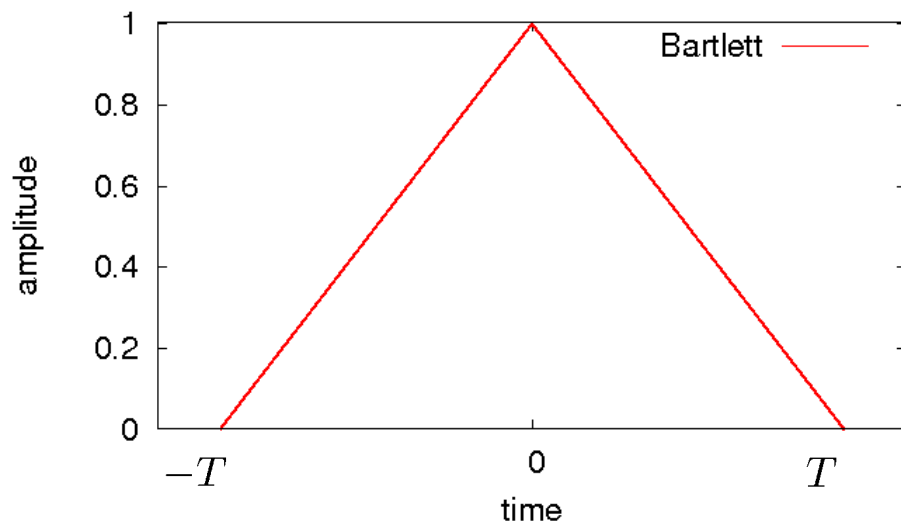
三角窓

$$B(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & (|t| < T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

- Bartlett窓とも呼ばれる
- 矩形窓の自己相関で表される
- サイドローブの最大値: -27dB

矩形窓と比べて...

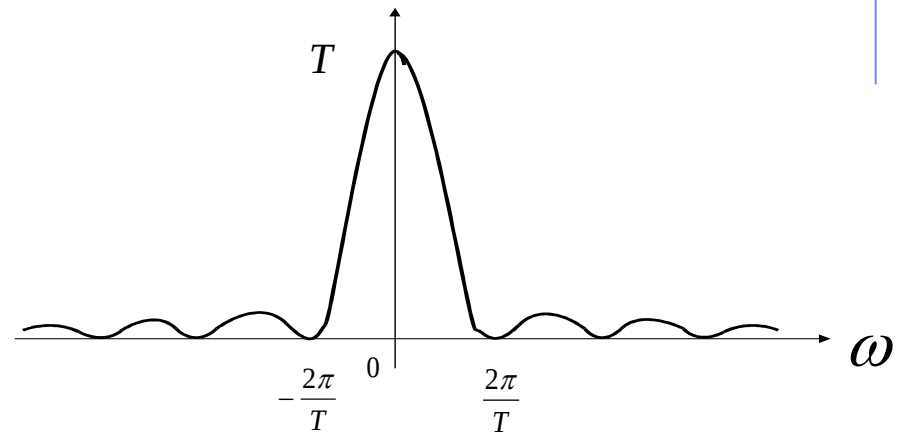
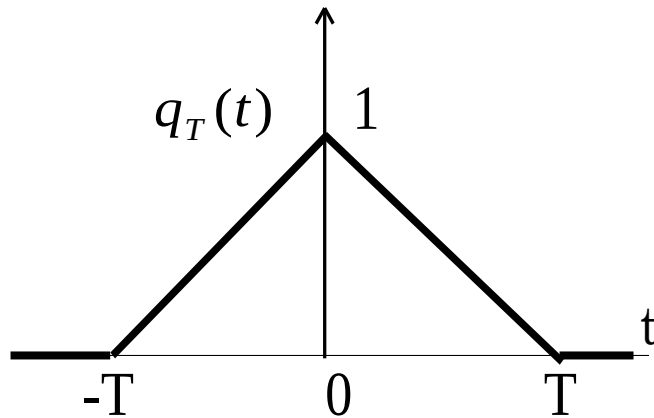
- メインローブの幅は2倍
- サイドローブの高さは1/2 [in dB]



三角窓(bartlett窓)のFourier変換

復習

■ $f(t) = q_T(t)$



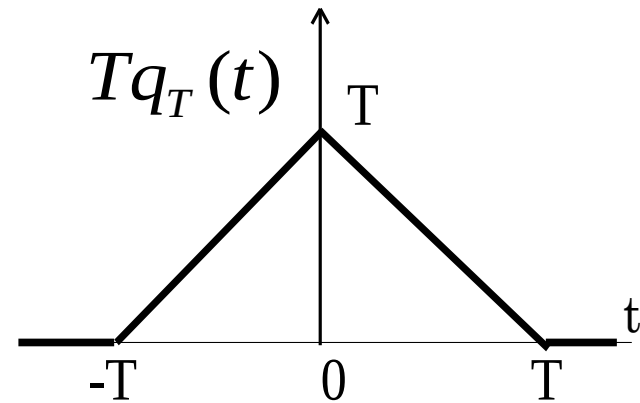
$$q_T(t) \leftrightarrow \frac{4 \sin^2 \left(\frac{\omega T}{2} \right)}{T \omega^2}$$

三角窓(bartlett窓)のFourier変換の証明1 復習

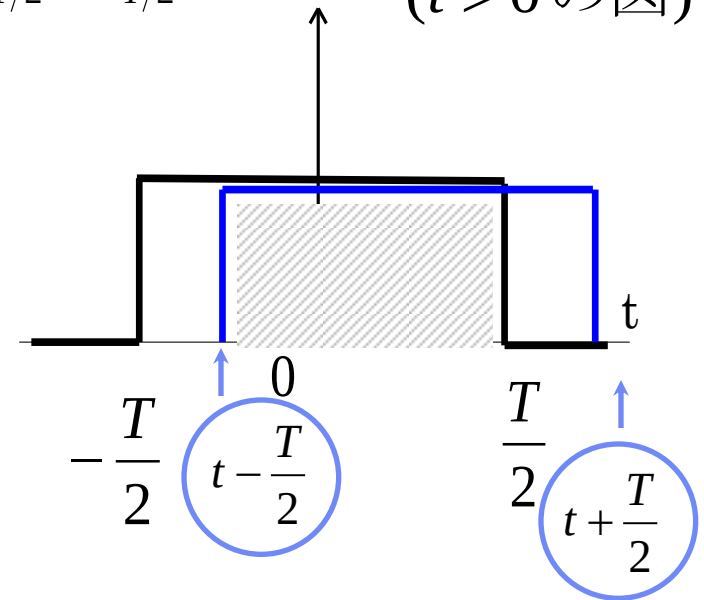
$$q_T(t) = \frac{1}{T} P_{T/2}(t) * P_{T/2}(t)$$

$P_{T/2}(t) * P_{T/2}(t) = T q_T(t)$ を示す。

$$\begin{aligned} & \because P_{T/2}(t) * P_{T/2}(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{T/2}(\tau) P_{T/2}(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} P_{T/2}(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{t-T/2}^{t+T/2} P_{T/2}(\tau') d\tau' \\ &= \begin{cases} T - t & (0 < t < T) \\ T + t & (-T < t \leq 0) \\ 0 & (t \leq -T, t \geq T) \end{cases} \end{aligned}$$



$P_{T/2} * P_{T/2}$ ($t > 0$ の図)



三角窓(bartlett窓)のFourier変換の証明2 復習

$$F(q_T) = \frac{1}{T} F(P_{T/2} * P_{T/2}) \quad \left(\because q_T = \frac{1}{T} P_{T/2} * P_{T/2} \right)$$
$$= \frac{1}{T} \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} \cdot \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} \quad \left(\because P_{T/2}(t) \leftrightarrow \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} \right)$$

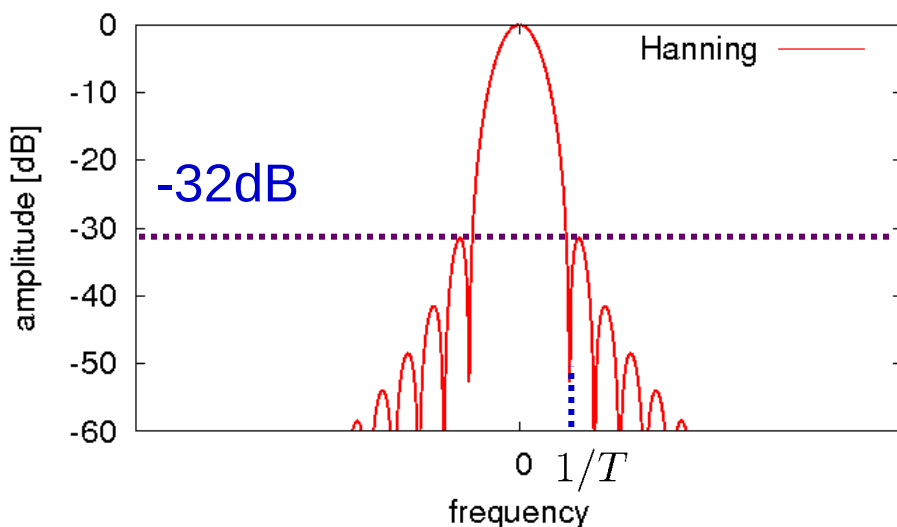
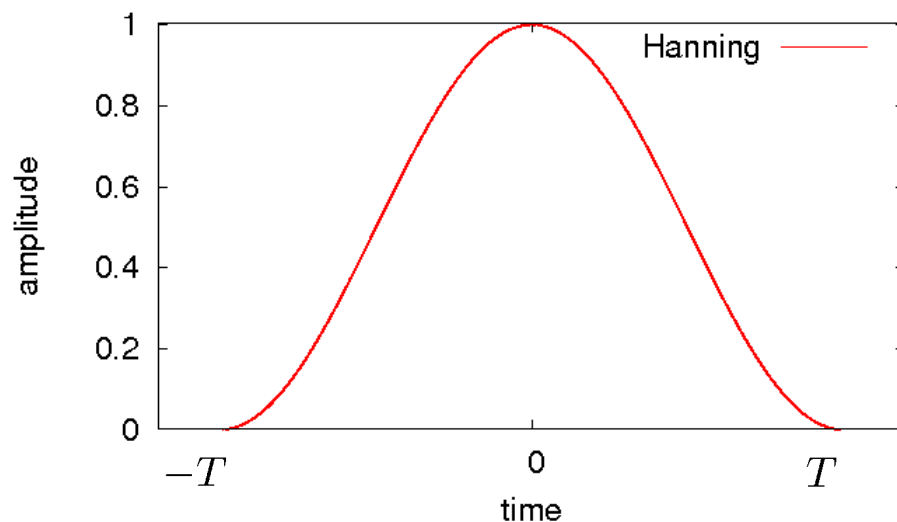
$$= \frac{4\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{T\omega^2}$$

⇒ 矩形窓のスペクトルが二乗されたもの
∴ サイドローブの高さは対数上で2倍速く減衰

Hanning窓

$$B(t) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) & (|t| < T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

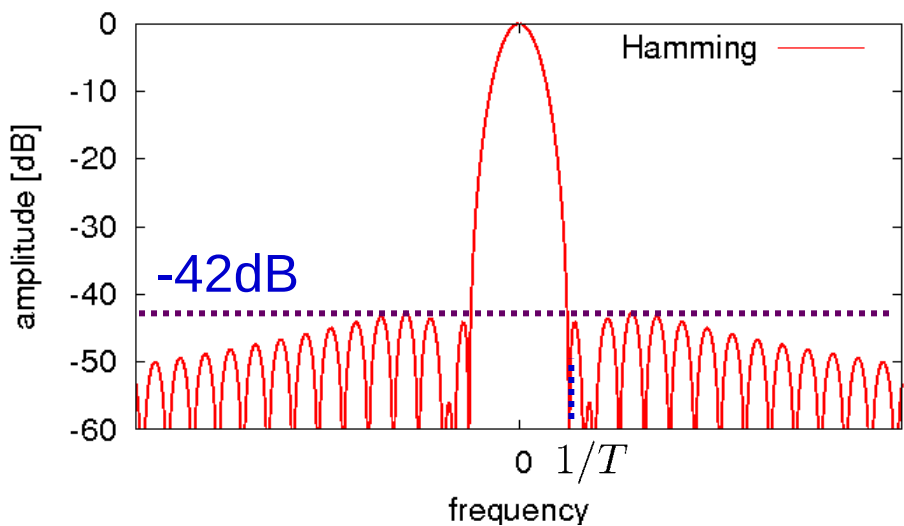
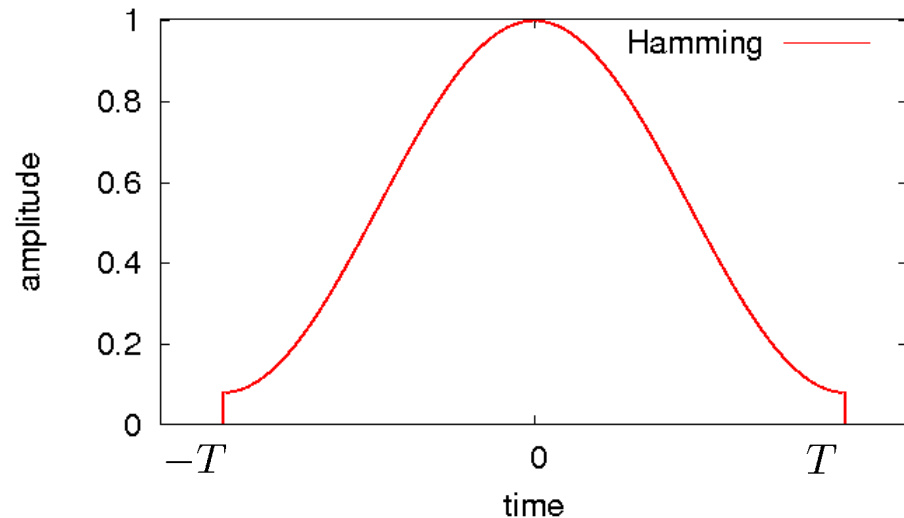
- J. von. Hanにより提案
- サイドローブの最大値:
-32dB
- メインローブの幅は
三角窓より大きい



Hamming窓

$$B(t) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) & (|t| < T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

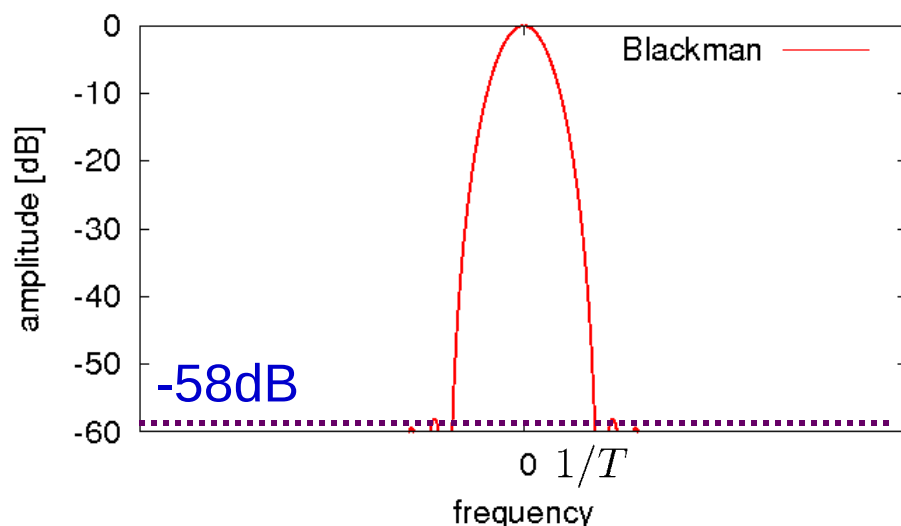
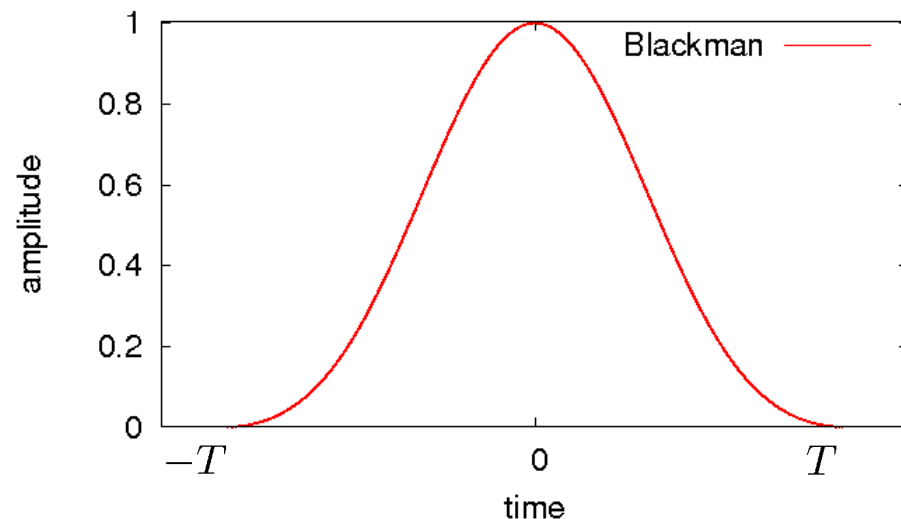
- R. W. Hammingにより提案
- 両端で0にならない窓関数
- サイドローブの最大値:
-42dB
- ただしサイドローブの減衰は
Hanning窓に比べ緩やか



Blackman窓

$$B(t) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \\ \quad + 0.08 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & (|t| < T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

- R. Blackmanにより提案
- サイドローブの最大値:
-58dB
- ただしメインローブの幅は
比較的大きい



Dolph-Chebyshev窓 (画像解析ハンドブック, 東海大学出版より抜粋)

この窓関数は、その周波数特性が次式を満たすものである。

$$W_D(\omega) = \frac{\cos \{N \cdot \cos^{-1}(B)\}}{\cosh \{N \cdot \cosh^{-1}(\beta)\}} \quad (1.5.7)$$

$$\text{ただし, } B = \beta \cos \frac{\omega}{2}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

$$\beta = \cosh \left\{ \frac{1}{N} \cdot \cosh^{-1}(10^{\alpha/20}) \right\}$$

$$\cos^{-1}(B) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(B/\sqrt{1-B^2}), & 0 \leq B \leq 1 \\ \log(B + \sqrt{B^2 - 1}), & B > 1 \end{cases}$$

N はサンプルデータ数、 α は定数

この式のフーリエ逆変換 $w_D(n)$ は式(1.5.7)の値から、次式に基づいて計算される。

$$w_D(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_D(\omega) e^{jn\omega} d\omega \quad (1.5.8)$$

この窓関数の特性を図 1.5.6 に示している。特徴は、その周波数特性において、主ローブの左右に連なるサイドローブ・レベルが一定値 $1/10^{\alpha}$ (-20α dB) になることで

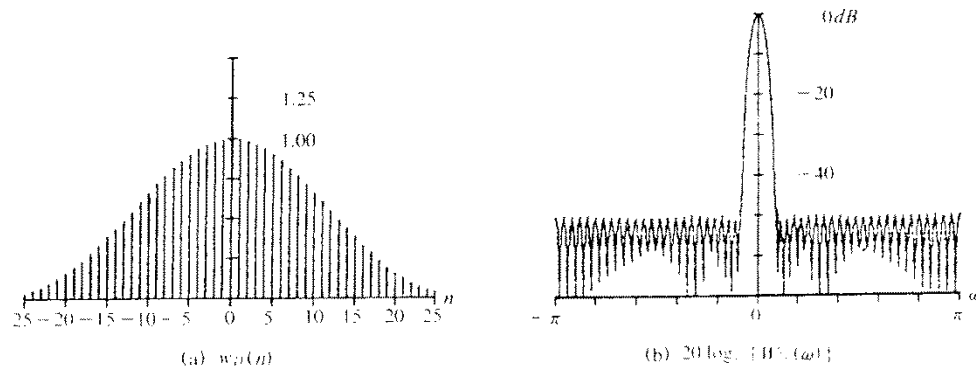


図 1.5.6 ドルフ・チェビシェフ窓 $w_D(n)$ とその周波数特性 ($N=51, \alpha=2.5$)

与えられたメインローブ幅の中で最もサイドローブピークが低い窓関数は何か？

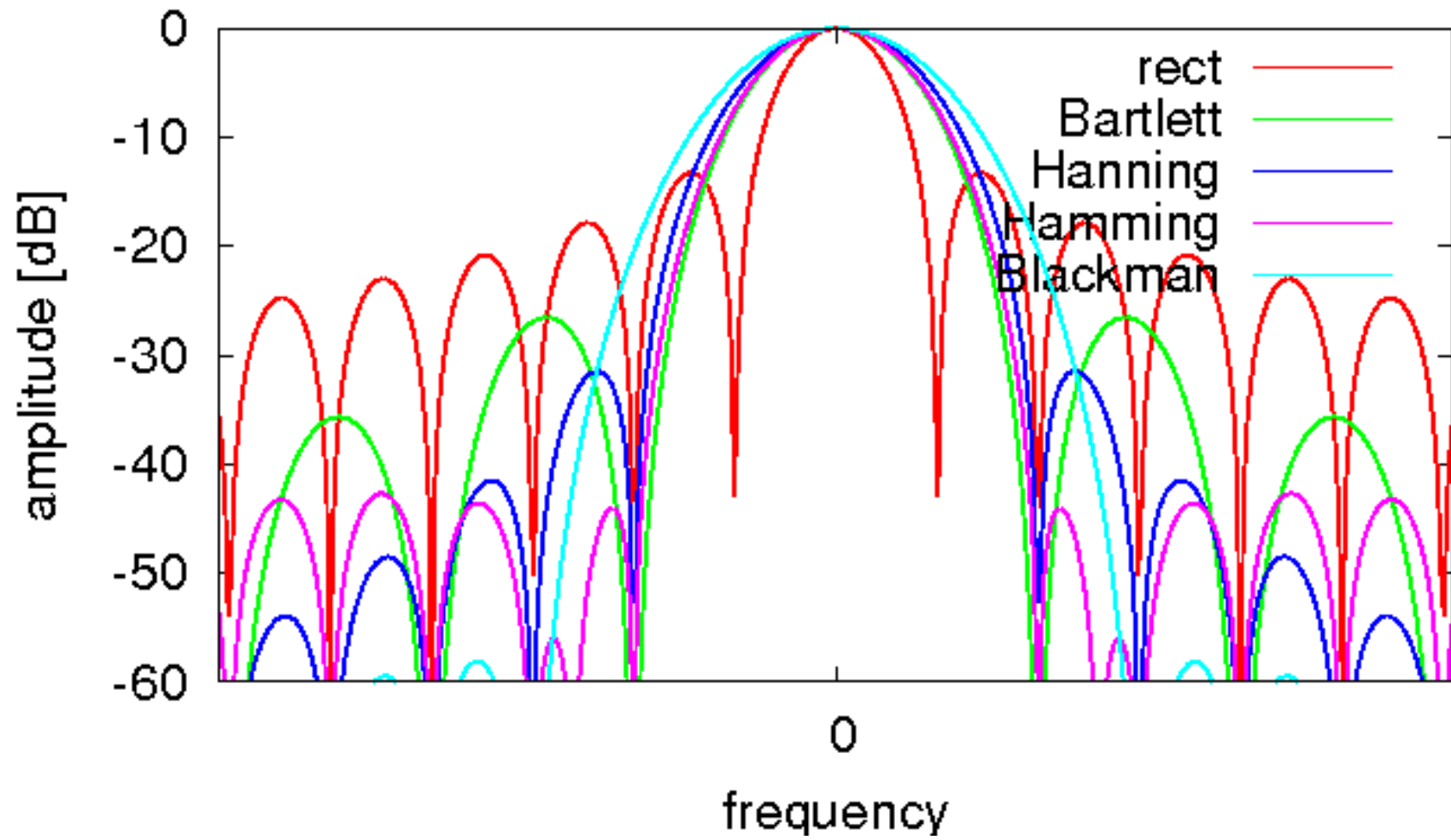


サイドローブの最大値が最小になっているもの(ミニマックス近似)を見つける問題



等リプル特性をもつサイドローブが得られる

窓関数同士の比較



有限長観測からのパワースペクトルの推定

- 窓関数による信号の切り出し

$$\hat{x}(t) = x(t)B(t)$$

- 自己相関関数の計算(場合によっては+標本平均)

$$\phi_T(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)B(t)x(t+\tau)B(t+\tau)dt$$

- Fourier変換

$$\Phi_T(\omega) = F[\phi_T(t)]$$