

信号処理論第二 第7回 (11/6)

情報理工学系研究科システム情報学専攻
猿渡 洋

hiroshi_saruwatari@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

信号処理論第二 講義予定(金曜2眼)

- 9/25: 第1回
- 10/02: 第2回
- 10/09: 第3回
- 10/16: 第4回
- 10/23: 第5回
- 10/30: 第6回
- 11/06: 第7回
- 11/27: 第8回
- 12/04: 第9回
- 12/11: 第10回
- 12/18: 第11回
- 12/25: 第12回
- 1/08: 第13回
- 01/22: 期末試験(予定)

※2020年度は全て90分講義とする(10時25分～11時55分)

講義内容

- δ 関数再考
- δ 関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

講義資料と成績評価

■ 講義資料

- システム1研HP <http://www.sp.ipc.i.u-tokyo.ac.jp/>からダウンロードできるようにしてあります

■ 成績評価

- 学期末試験

確率密度関数のモーメント

復習

- 確率変数 x の n 次モーメント : x^n の期待値

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx = E[x^n]$$

- モーメントと統計量

m_1 : 平均 (分布の中心)

$m_1 = 0$ であれば、

$m_2 = \sigma^2$: 分散 (分布の広がり)

m_3/σ^3 : 歪度 (分布の非対称性) Skewness

$m_4/\sigma^4 - 3$: 尖度 (分布の鋭さ) Kurtosis

※ Kurtosisの定義として3を引くものと引かないものがある。なぜか？

ガウス性信号のカーソシス(1)

ガウス性信号の n 次モーメントには以下の漸化式が成り立つ

$$\begin{aligned} E[X^n] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx \quad \text{部分積分} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{(n+1)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n+2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{(n+1)} E[X^{n+2}] \end{aligned}$$

よって平均(1次モーメント)0、分散(2次モーメント) σ^2 のとき

$$m_n = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1) \sigma^n & (n = \text{even}) \\ 0 & (n = \text{odd}) \end{cases}$$

ガウス性信号のカートシス(2)

よってガウス性信号のカートシスは

$$\text{kurtosis} = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0$$

Kurtosisの定義として3を引くものと引かないものがある。

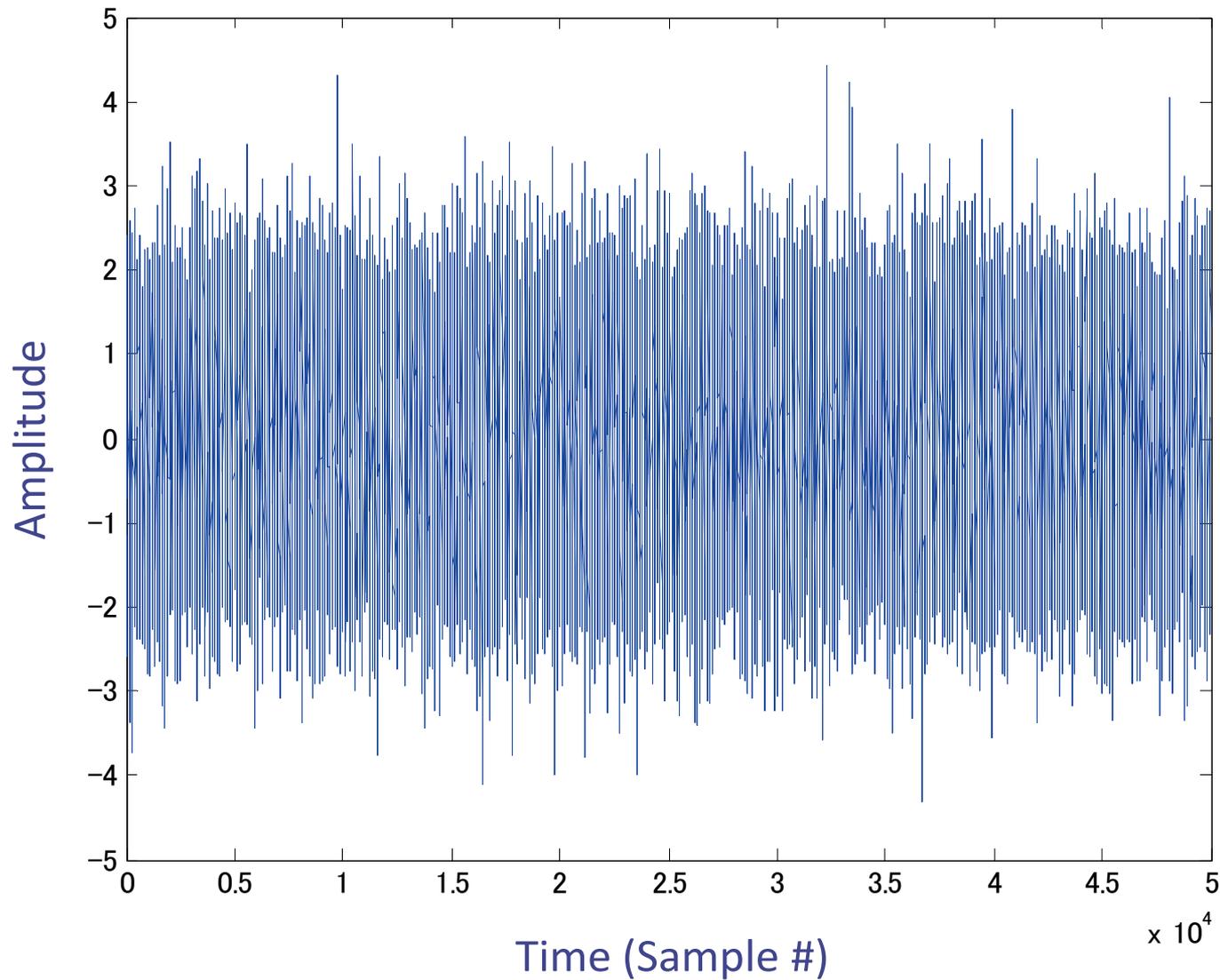
⇒ 「ガウス性」という性質を基準にとりたい場合は3を引く

⇒ この基準は「ランダムか否か」という基準でもある(後述)

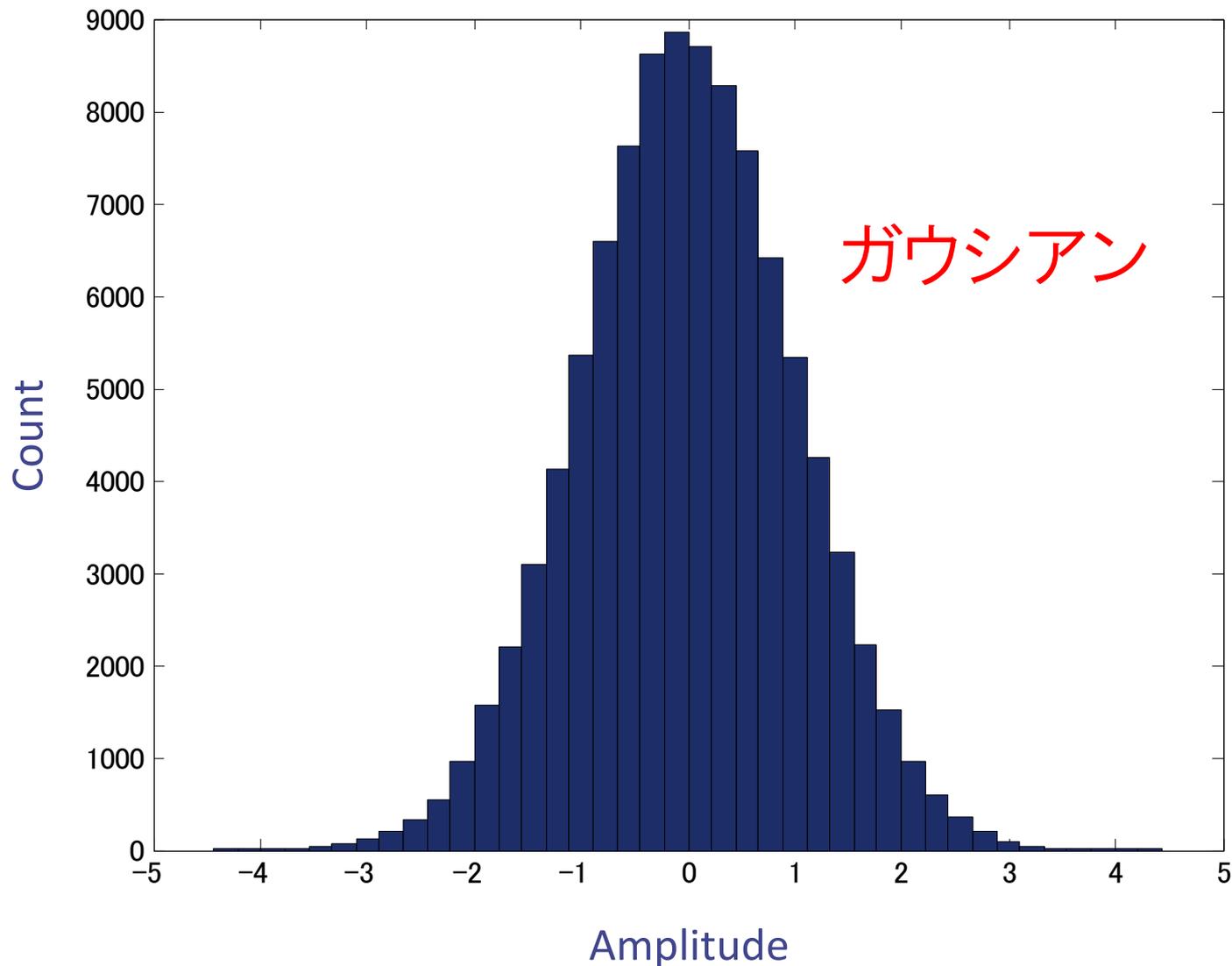
⇒ 一般に、カートシスはガウス性からの外れ度合を表す

{ 正のカートシス: 「優ガウス性(super-Gaussian)」
負のカートシス: 「劣ガウス性(sub-Gaussian)」

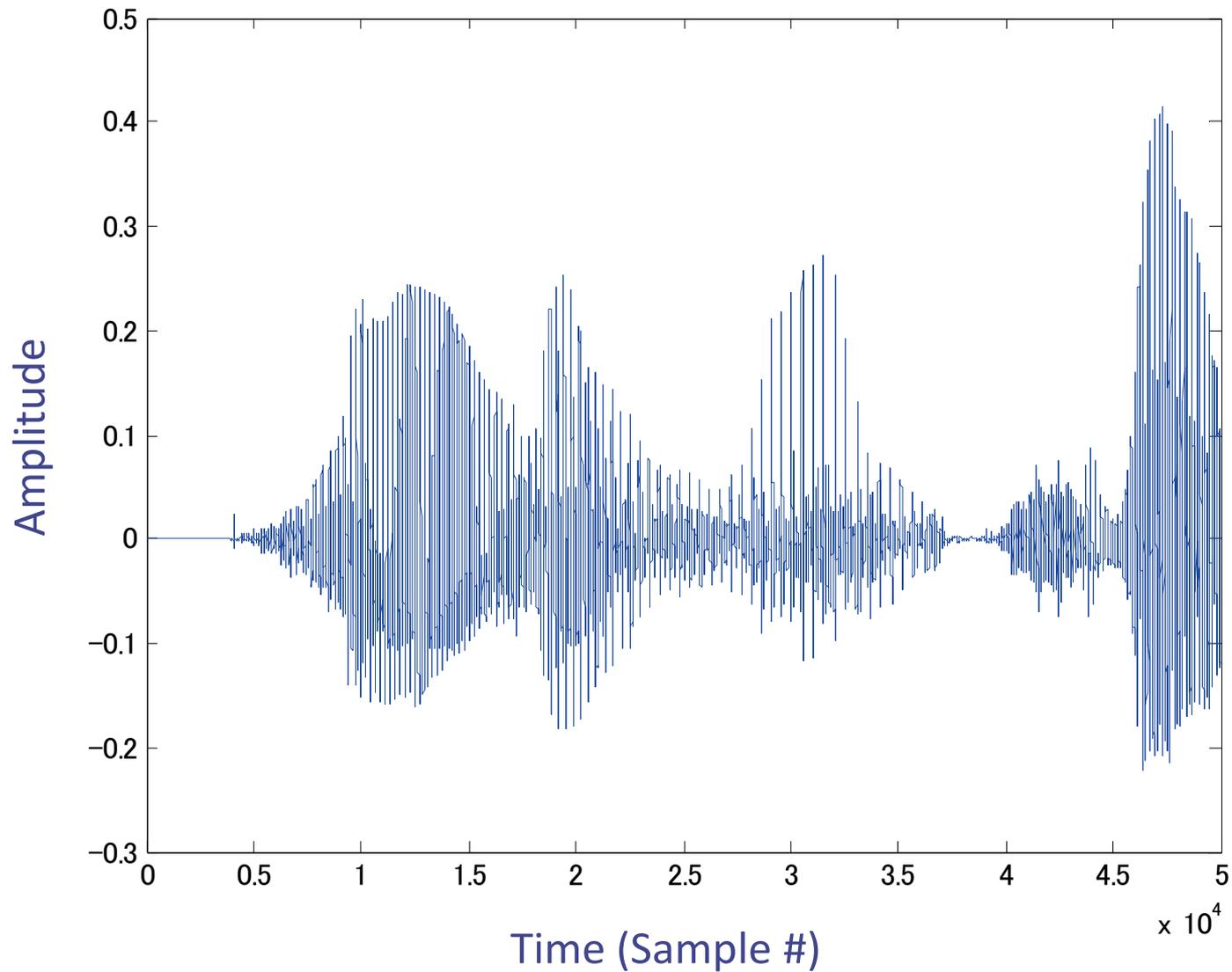
不規則信号の例1: ガウス性信号



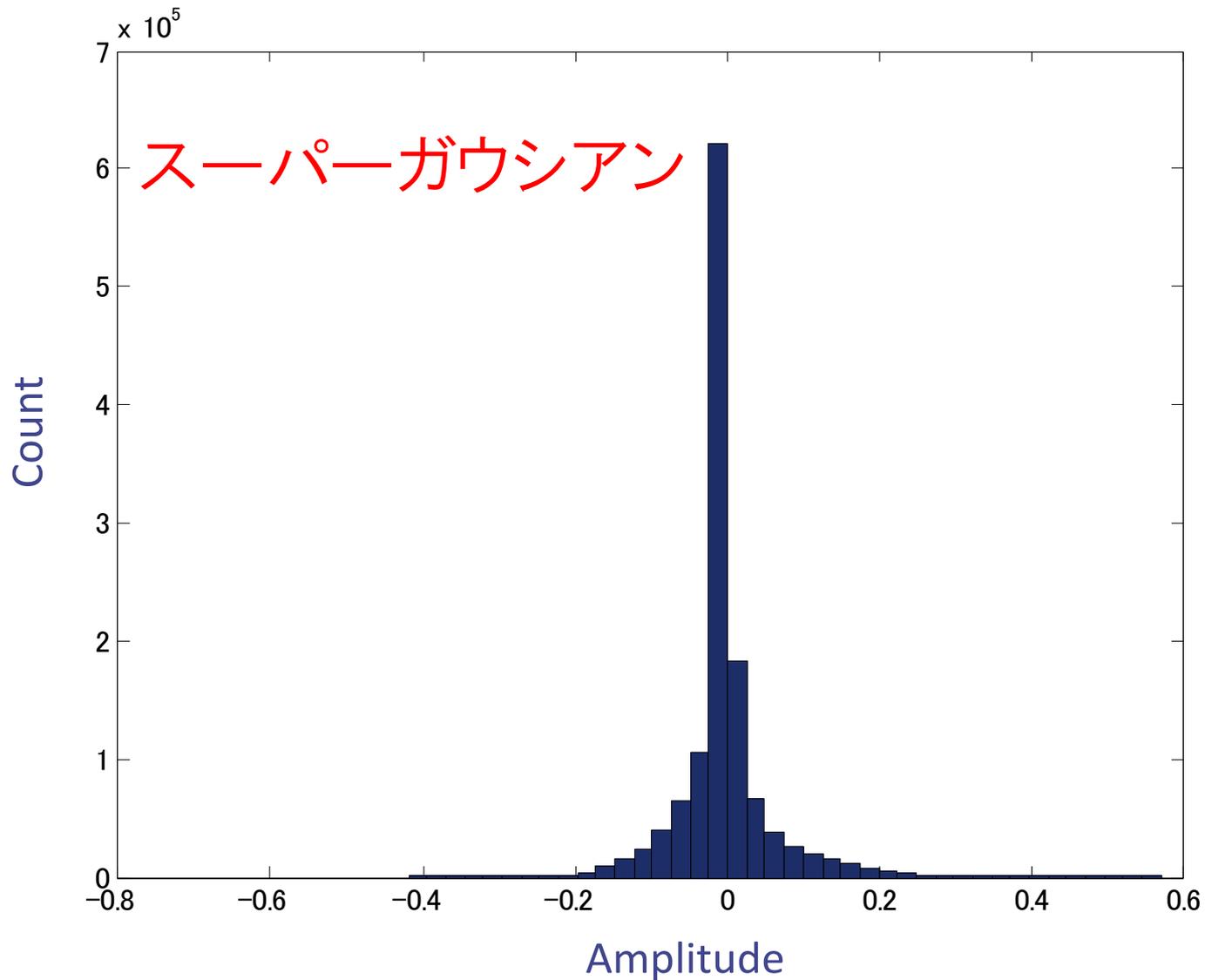
不規則信号の例1: ガウス性信号



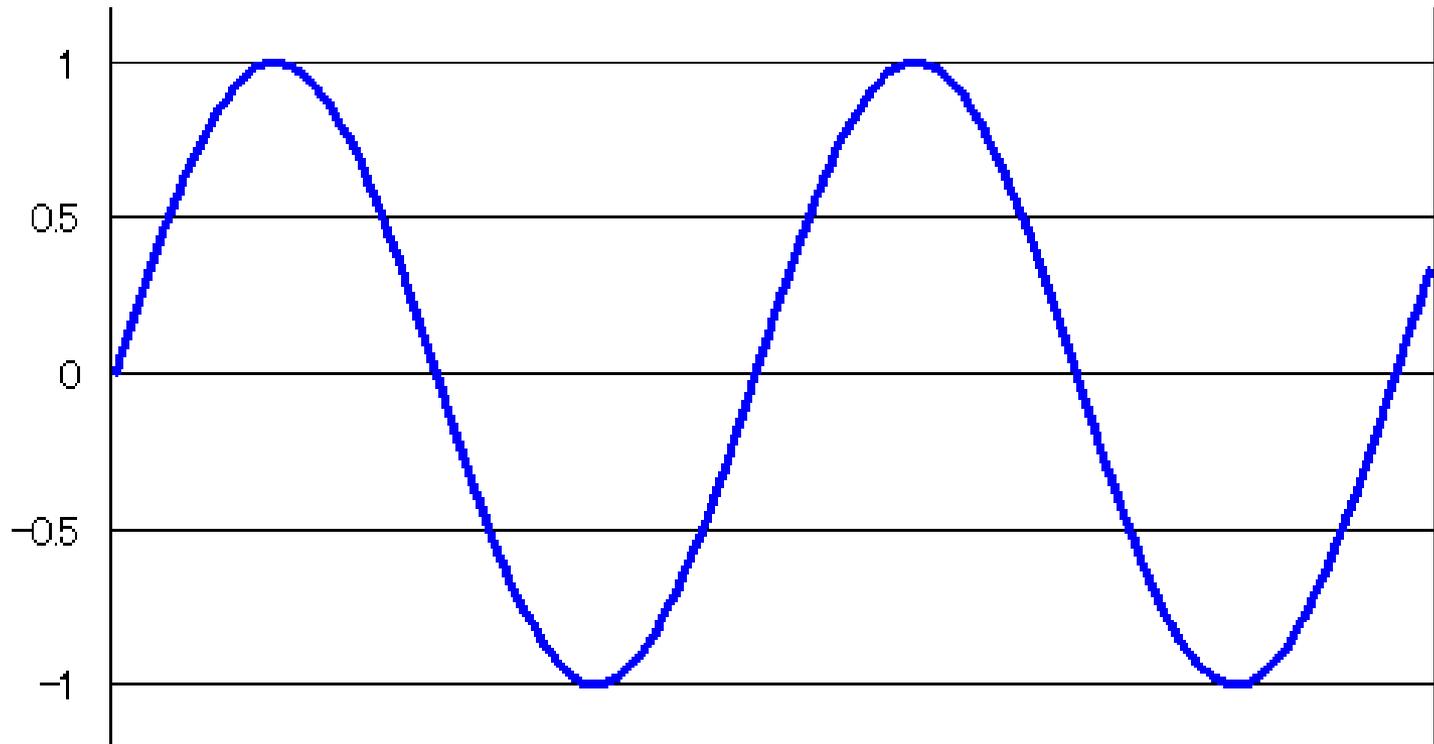
不規則信号の例2: 朗読音声



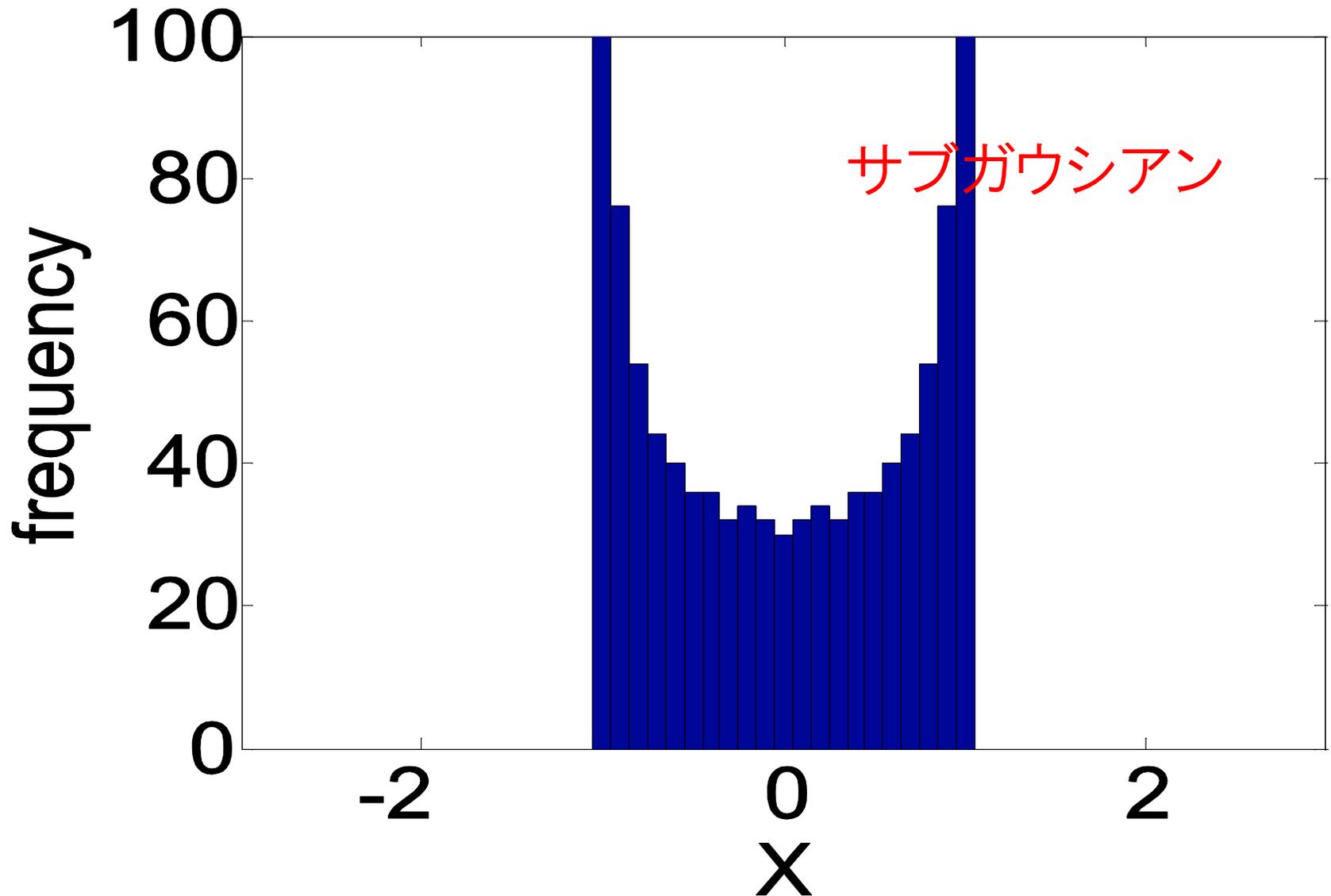
不規則信号の例2: 朗読音声



不規則信号の例3: 音叉の音(正弦波)



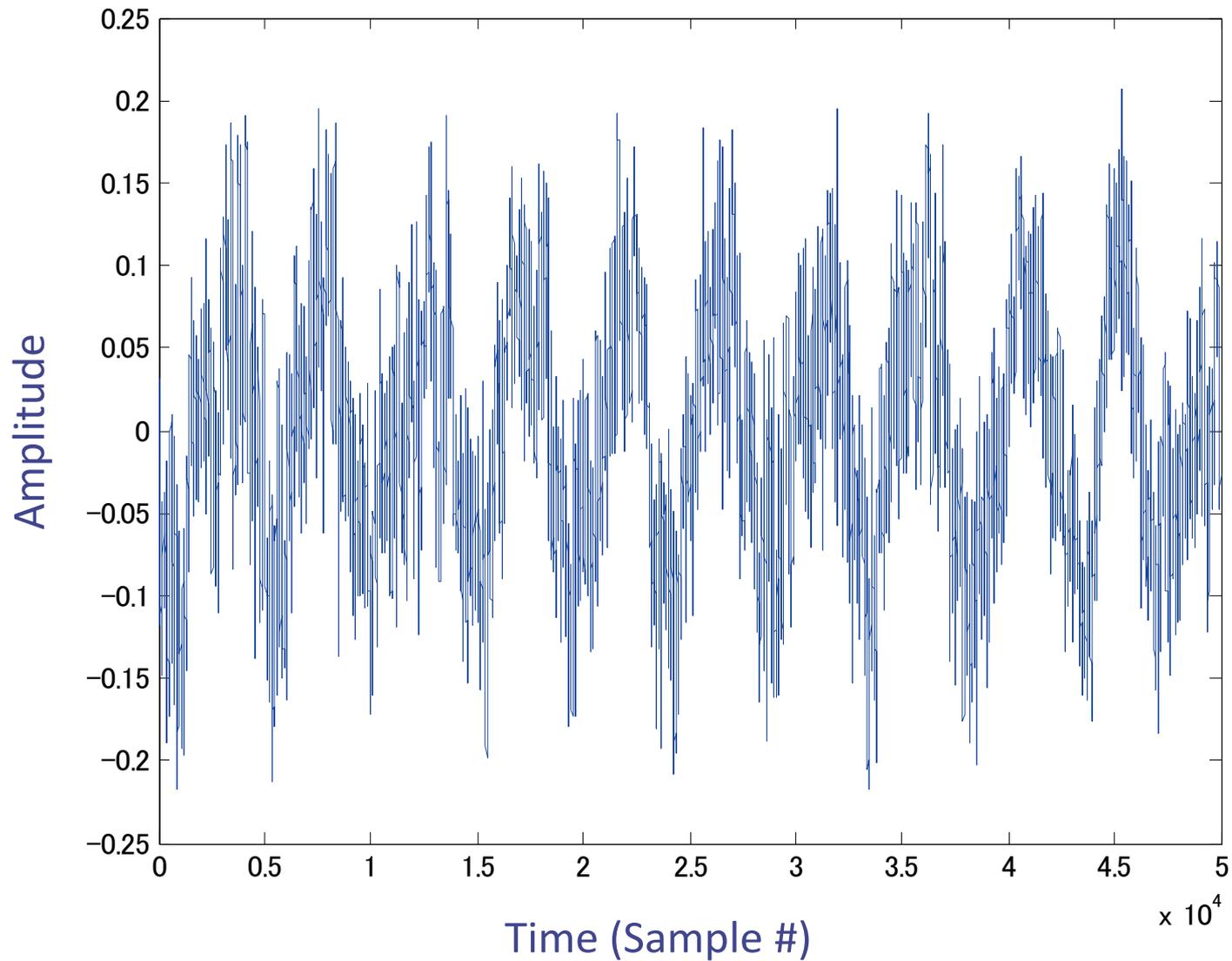
不規則信号の例3: 音叉の音(正弦波)



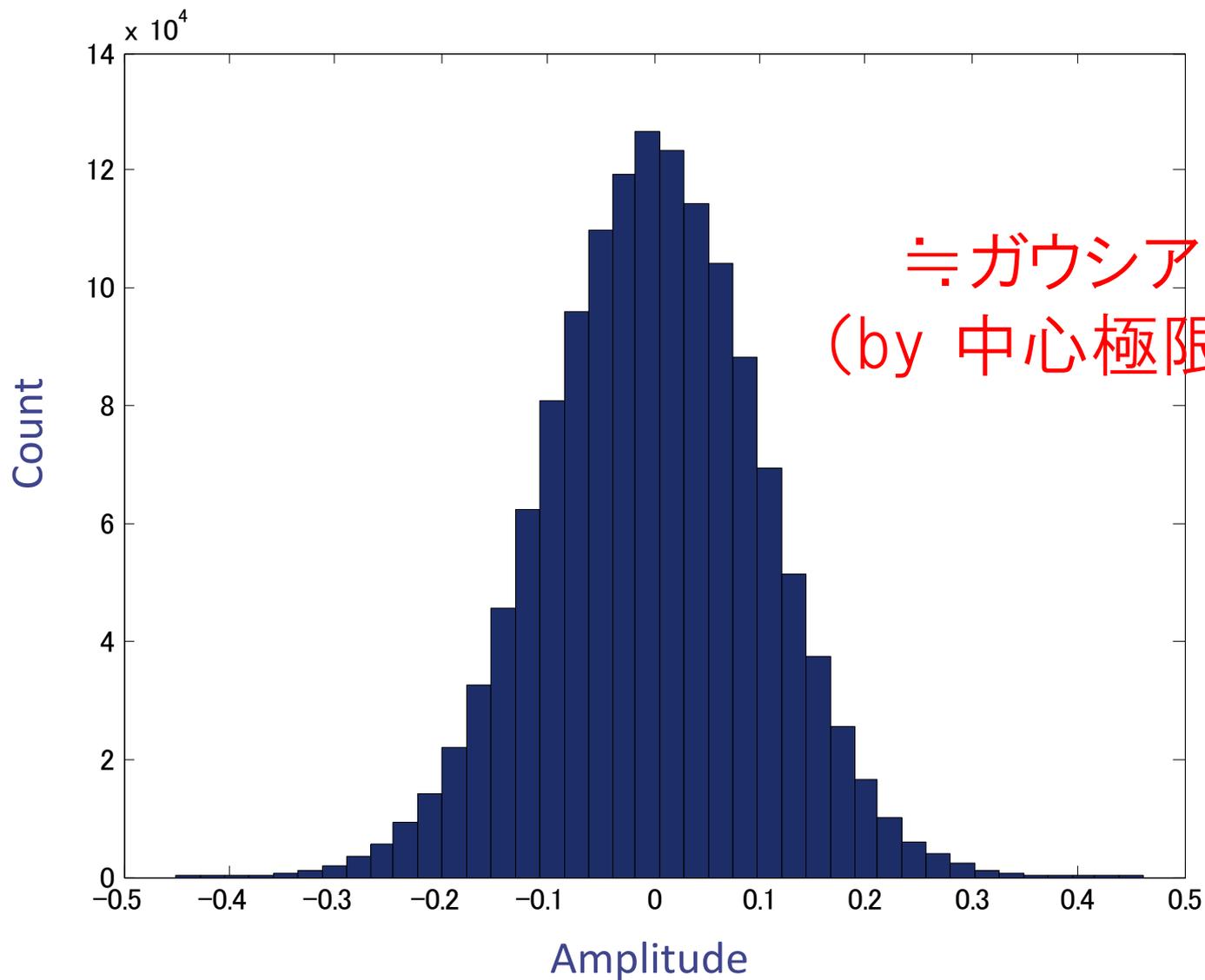
不規則信号の例4: 雑踏での雑音



不規則信号の例3: 雑踏での雑音



不規則信号の例4: 雑踏での雑音



ガウス性信号のパワースペクトルの分布(1)

- ガウス性信号のフーリエ変換は、実部・虚部がi.i.d.の複素ガウス性信号となる。実部を x_R 、虚部を x_I とすると

$$m_n(x_R^2) = m_{2n}(x_R) \quad m_n(x_I^2) = m_{2n}(x_I)$$

$$\because \text{モーメントの乗法性 } m_n(x(t)^a) = m_{an}(x(t))$$

よって

$$\begin{aligned} k_n(x_R^2 + x_I^2) \\ = k_n(x_R^2) + k_n(x_I^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \because \text{キュムラントの加法性} \\ k_n(x(t) + y(t)) = k_n(x(t)) + k_n(y(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \sum_{\pi(n)} (-1)^{|\pi(n)|-1} (|\pi(n)| - 1)! \prod_{B \in \pi(n)} m_{|B|}(x_R^2) \\ + \sum_{\pi(n)} (-1)^{|\pi(n)|-1} (|\pi(n)| - 1)! \prod_{B \in \pi(n)} m_{|B|}(x_I^2) \end{aligned}$$

ガウス性信号のパワースペクトルの分布(2)

- パワースペクトルのモーメントを求めると

$$m_n(x_R^2 + x_I^2) = \sum_{\pi(n)} \prod_{B \in \pi(n)} k_{|B|}(x_R^2 + x_I^2)$$

以上より、ガウス性信号のパワースペクトル分布は、以下のモーメントをもつ(ここでは x_R と x_I の分散を σ^2 とおく)

$$m_1(x_R^2 + x_I^2) = 2m_2(x_R) = 2\sigma^2$$

$$\begin{aligned} m_2(x_R^2 + x_I^2) &= 2m_4(x_R) + 2m_2^2(x_R) \\ &= 2(3\sigma^4) + 2\sigma^4 \\ &= 8\sigma^4 \end{aligned}$$

⋮ 以後、高次モーメントが続く…

ガウス性信号のパワースペクトルの分布(3)

- 前記のモーメントを持つ分布は何であろうか？

$$m_1 (x_R^2 + x_I^2) = 2\sigma^2$$

$$m_2 (x_R^2 + x_I^2) = 8\sigma^4$$

$$m_3 (x_R^2 + x_I^2) = 48\sigma^6$$

⋮



ガンマ分布(自由度2の χ 二乗分布)

ガウス性信号のパワースペクトルの分布(4)

- 形状母数 α 、尺度母数 θ を持つガンマ分布

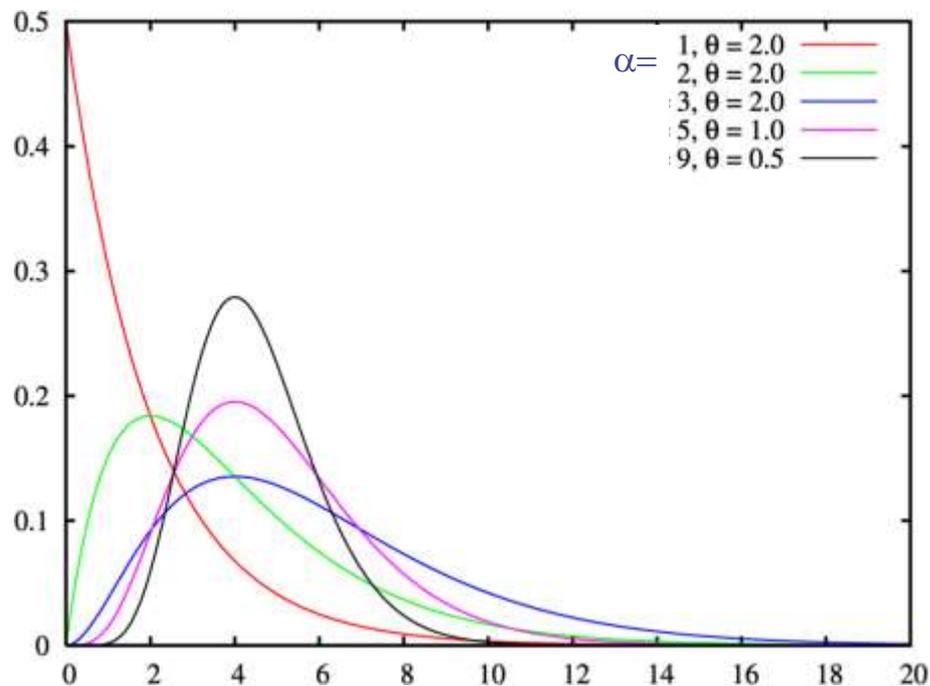
$$p_{\text{gamma}}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-x/\theta) \quad (\Gamma(\alpha) \text{はガンマ関数})$$

$$m_n(x) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)\theta^n$$

前スライドは

$$\alpha = 1, \theta = 2\sigma^2$$

とおいた場合に相当



なぜガウス分布を基準にとるのか？

■ある事象の情報量

$$I(x) = \log \frac{1}{p(x)} = -\log p(x)$$

めったに起こらないこと
ほど情報量は大きい

■エントロピー

$$H(x) = \mathbb{E}\{-\log p(x)\}$$

- 各事象の情報量の平均値
- 事象のランダムさを表す指標
- ガウス分布の場合

$$H(x) = \log \sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{\mathbb{E}\{(x - \mu)^2\}}{2\sigma^2} = \frac{1}{2} \log 2\pi\sigma^2 + \frac{1}{2}$$

エントロピーが最大になる確率密度関数は何か？

■問題:

■ Maximize $H(x) = - \int p(x) \log p(x) dx$ with respect to $p(x)$

Subject to $\int p(x) dx = 1, \int xp(x) dx = 0, \int x^2 p(x) dx = 1$

■ラグランジュ未定乗数法

■ ラグランジアンをpに関して偏微分して0と置く

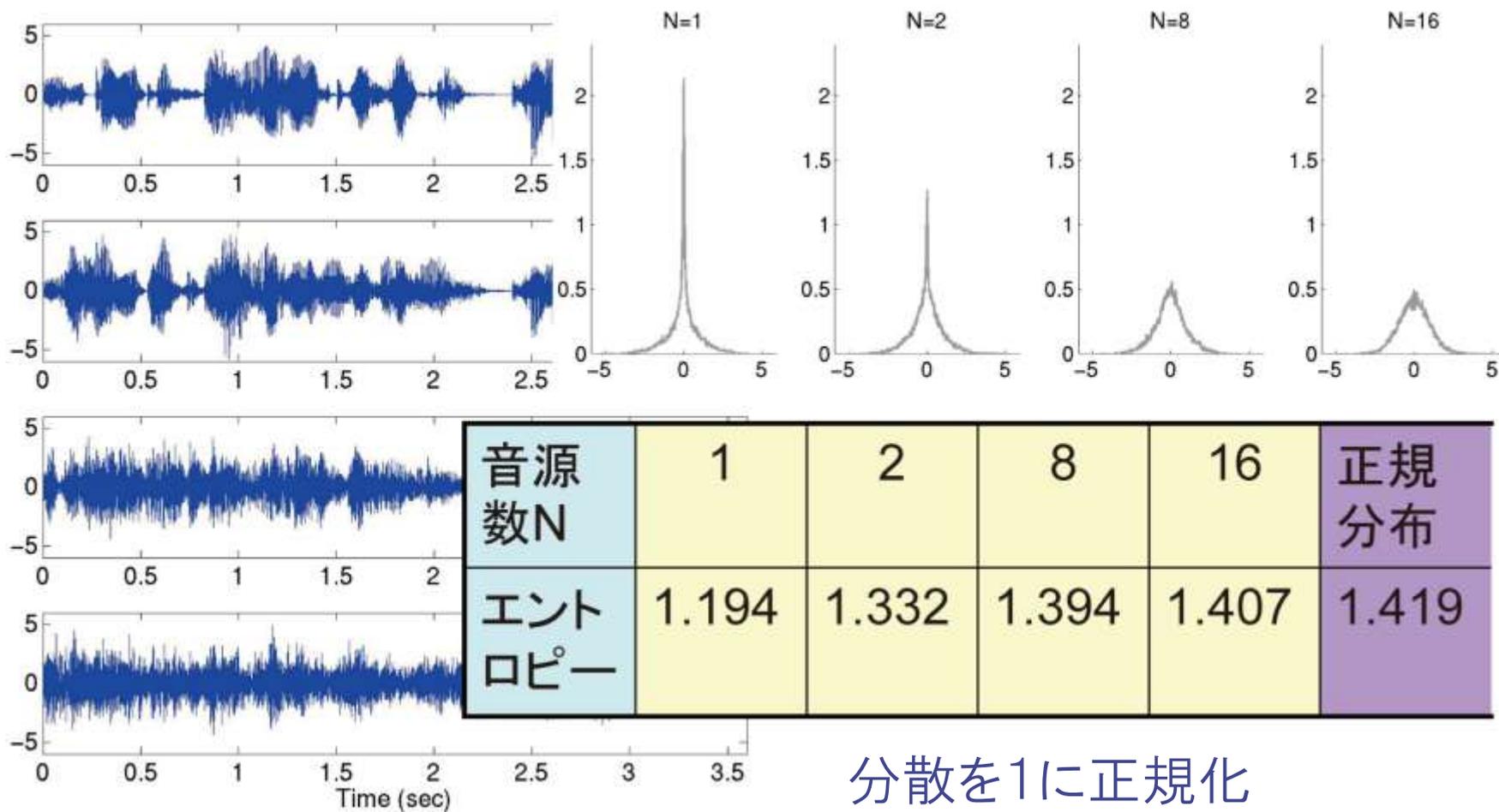
$$\mathcal{L}[p] = - \int p(x) \log p(x) dx \\ + \lambda_0 \left(\int p(x) dx - 1 \right) + \lambda_1 \left(\int xp(x) dx \right) + \lambda_2 \left(\int x^2 p(x) dx - 1 \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = -1 - \log p(x) + \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 = 0$$

$$\Rightarrow p(x) = \exp(1 - \lambda_0 - \lambda_1 x - \lambda_2 x^2)$$

たしかにガウス分布型になっている！

混ぜた音のエントロピー



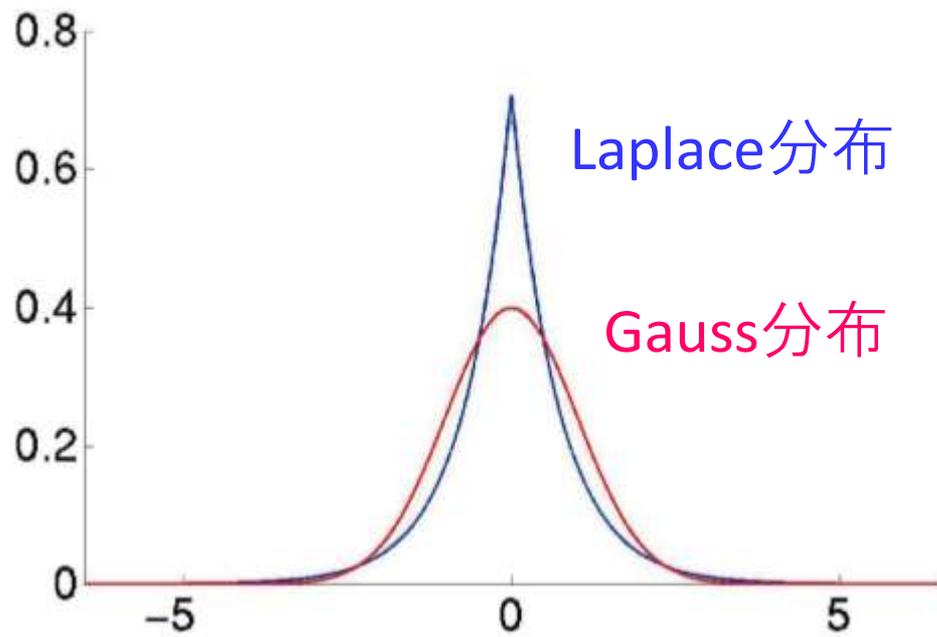
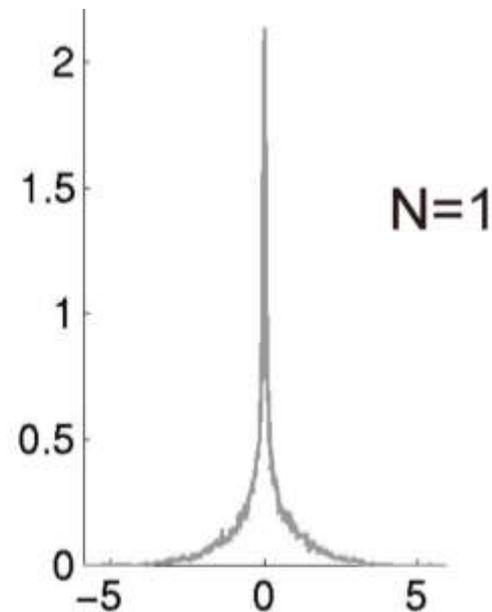
音源の統計的性質

- 我々の身の回りにある音（音声や楽音等）の波形は振幅値0の頻度が高い

- Laplace分布によるモデル化

$$p(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{b}\right)$$

平均: $\mu = 0$
分散: $2b^2 = 1$



エントロピーの近似計算

- 真の分布を良く近似する分布を用いてエントロピーを計算

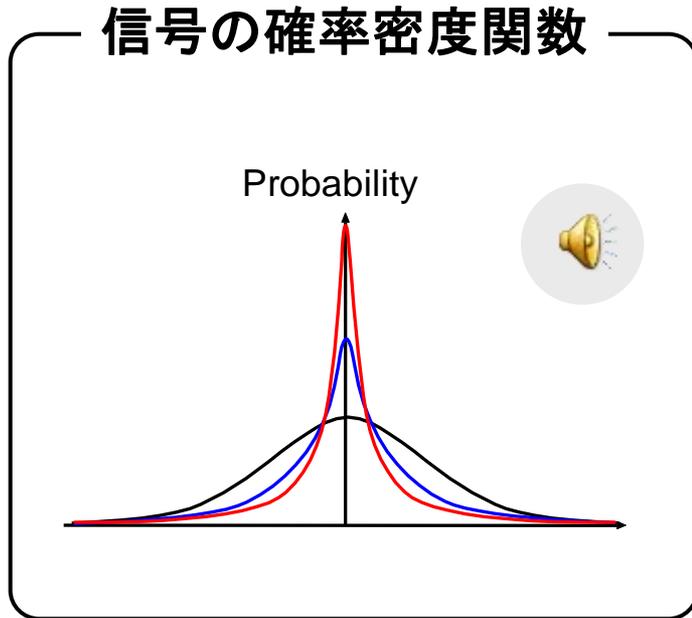
$$H(x) = \mathbb{E}\{-\log p(x)\} \simeq -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log p(x(t))$$

音源数N	1	2	8	16	正規分布
エントロピー	1.194	1.332	1.394	1.407	1.419
ラプラス分布による近似	1.286	1.356	1.420	1.457	1.474
ガウス分布による近似	1.419	1.419	1.419	1.419	1.419

良好→

分散正規化のため変化無し

耳で聴く優ガウス性



※ 5 秒ごとに分布が変化します

優ガウス性の音は馴染みが薄い

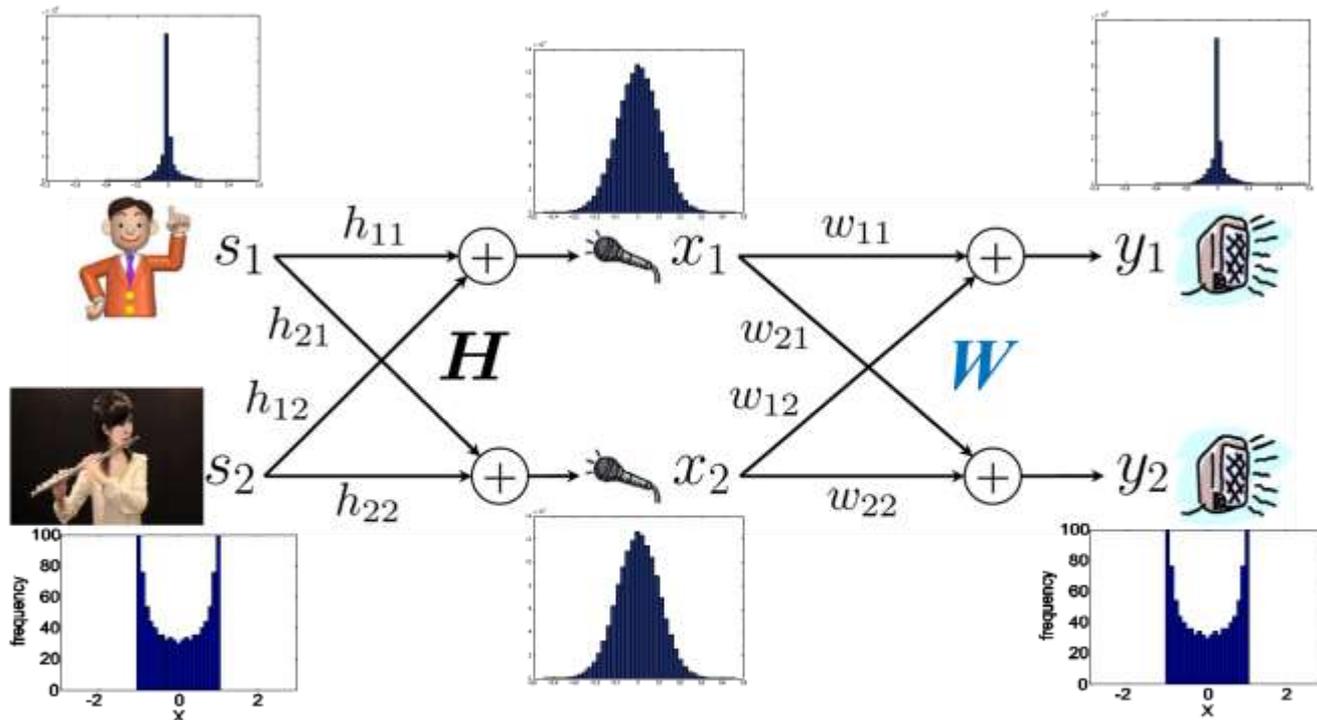
⇒ 中心極限定理により自然界の音は耳に到達するころには
ガウス化する傾向にあるから

⇒ 逆に強い優ガウス性はスパース（疎）な波動源を表す

ガウス分布から引き離す「ブラインド」信号処理

- 独立成分分析(ICA) [Comon 1994], 独立ベクトル分析(IVA) [Kim 2006], 独立低ランク行列分析(ILRMA) [Kitamura 2015]

- 独立 = エントロピー減 = 正規分布から遠ざかる
- 混合(=ガウス化)してしまった因子波源を特定するために、より非ガウス化を達成する「逆システム」を推定⇒波源同定



ここでは非ガウス性以外に
何の情報・仮定も用いない



ブラインド処理と呼ばれる

逆システム W を決める ⇒ 出力の確率分布を見る ⇒ **非ガウスか確認**
(これを計算機の中でグルグル繰り返すと最後は音が分離される！)

高速ICA、独立低ランク行列分析によるデモ

- リアルタイム音声聞き分け(警察備品に採用)

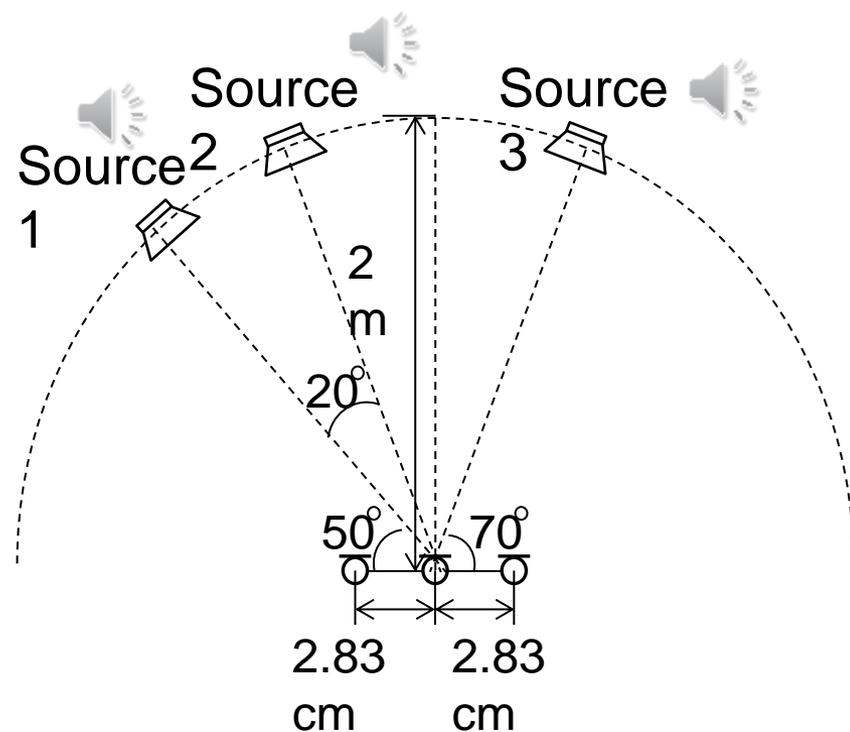
[Saruwatari 2009]



- ドラム、弦楽器、音声からなる複合音の分離



[Kitamura, Saruwatari et al. 2009]



ロボット対話 デモンストレーション

**Demonstration for
spoken-oriented hands-free
interactive robot.**

[Takahashi, Saruwatari+, IEEE Trans. ASLP 2009]

災害対応タフロボット [内閣府ImPACTプロジェクト2016]

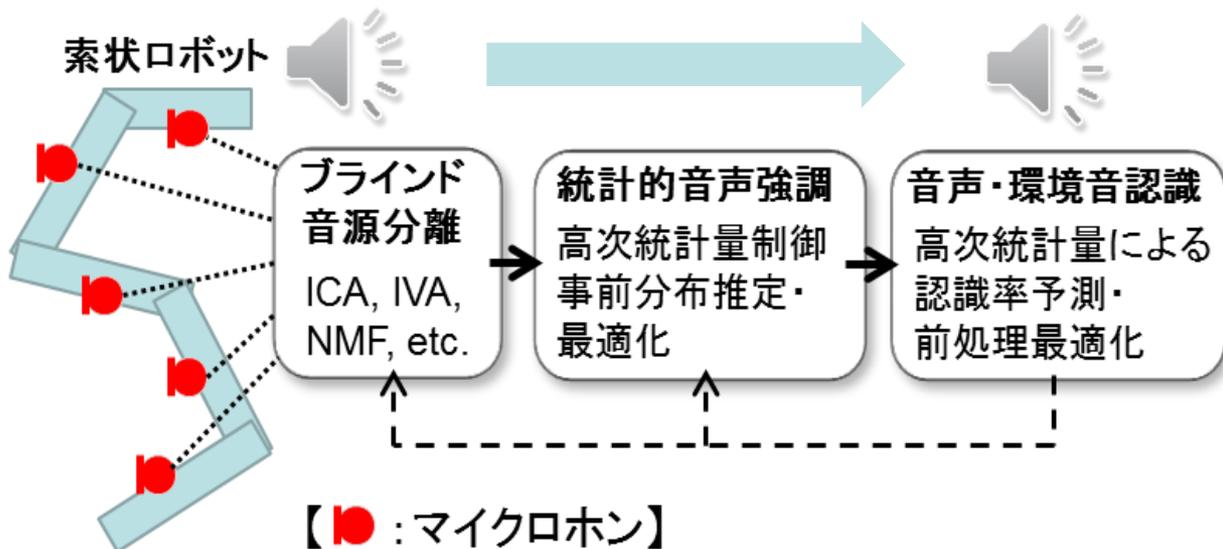
- 災害時の倒壊家屋に入り込んで被災者発見
- 環境音認識による状況把握・救助支援

[Bando, Saruwatari+, J. Robotics & Mechatronics 2017]



被災者はあるのか？

人の声を発見！



いかなる曲がりくねった形状においても位置不定マイク同士が協調して騒音の中から被災者の声を見つけ出す

参考: 独立成分分析によるブラインド音源分離

- I 個の音源信号 \mathbf{s} が混合行列 \mathbf{H} により混ざり合い, J 個の観測信号 \mathbf{x} が T 個得られたとする。

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\mathbf{s}(t) \quad t = 1, \dots, T$$
$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_I \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_I \end{bmatrix}$$

- 分離行列 \mathbf{W} により分離信号 \mathbf{y} を生成する。

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}\mathbf{x}(t) \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_I \end{bmatrix}$$

- \mathbf{W} の計算は観測信号 \mathbf{x} のみから行う。
 I 個の分離信号 y_1, \dots, y_I が互いに独立になるようにする。

参考:最尤推定法によるパラメータ推定

- 分離行列 \mathbf{W} を直接推定
- 観測信号 $X = \{\mathbf{x}(t)\}_{1 \leq t \leq T}$ に対する \mathbf{W} の尤度関数

$$\mathcal{L}(\mathbf{W}) = \prod_{t=1}^T p(\mathbf{x}(t) | \mathbf{W}) \rightarrow \text{maximize}$$

- 線形変換と確率密度関数

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W} \mathbf{x}(t) \longrightarrow \underline{p(\mathbf{y}(t))} = \frac{1}{|\det \mathbf{W}|} p(\mathbf{x}(t))$$

- 音源信号の独立性と非Gauss性を仮定

$$p(\mathbf{y}(t)) = \prod_{i=1}^I p(y_i(t)) \quad p(y_i(t)) : \text{Laplace分布など}$$

 $\log \mathcal{L}(\mathbf{W}) = T \log |\det \mathbf{W}| + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \log p(y_i(t))$

参考:最尤推定法によるパラメータ推定

- 目的関数:

$$\mathcal{J}(\mathbf{W}) = \log |\det \mathbf{W}| + \frac{1}{T} \sum_t \sum_i \log p(y_i(t))$$

- 勾配法により \mathbf{W} を反復的に更新

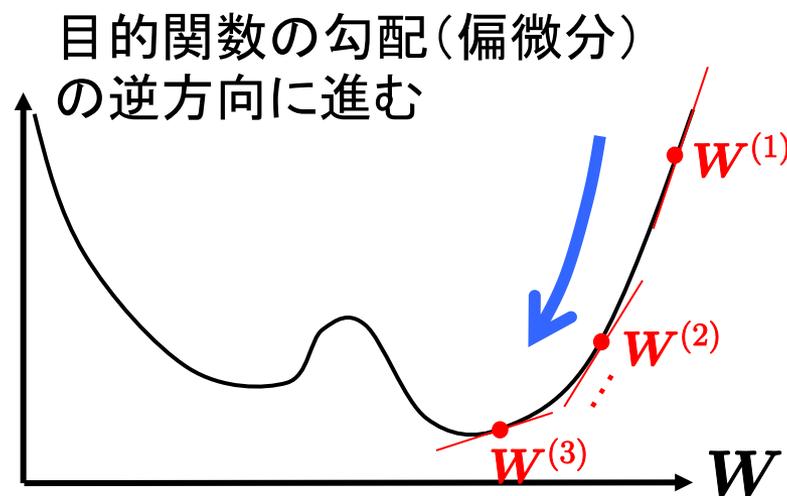
$$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W} + \eta \frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} \quad (\eta \text{ はステップサイズ})$$

勾配法とは?

- 目的関数 $Q(\theta)$ に対する
変数 $\theta^{(c)}$ の更新則:

$$\theta^{(c+1)} = \theta^{(c)} - \underbrace{\eta}_{\text{ステップサイズ}} \nabla Q(\theta^{(c)})$$

- 適切なステップサイズを設定することが必要である
- 目的関数が単調減少とは限らない



参考:最尤推定法によるパラメータ推定

- 目的関数:

$$\mathcal{J}(\mathbf{W}) = \log |\det \mathbf{W}| + \frac{1}{T} \sum_t \sum_i \log p(y_i(t))$$

- 勾配法により \mathbf{W} を反復的に更新

$$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W} + \eta \frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} \quad (\eta \text{ はステップサイズ})$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} = (\mathbf{W}^T)^{-1} - \frac{1}{T} \sum_t \Phi(\mathbf{y}(t)) \mathbf{x}(t)^T$$

$$\Phi(\mathbf{y}(t)) = \begin{bmatrix} \phi(y_1(t)) \\ \vdots \\ \phi(y_I(t)) \end{bmatrix}$$

$$\phi(y) = -\frac{\partial \log p(y)}{\partial y}$$

$\phi(y)$ の具体形

Laplace分布の場合: $\phi(y) = \text{sign}(y)$

近似分布の場合: $\phi(y) = \frac{y}{\sqrt{y^2 + \alpha}}$

参考: エントロピーとしての解釈

■ 独立 ⇒ Kullback Leibler Divergenceの最小化問題

- 一般にKullback Leibler Divergenceとは2分布間の距離

$$KL(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = \int p(\mathbf{z}) \log \frac{p(\mathbf{z})}{p(\mathbf{v})} d\mathbf{z}$$

上式において...

$p(\mathbf{z}) = p(y_1, \dots, y_K)$ 分離信号 $\mathbf{y}(t)$ の同時分布密度関数

$p(\mathbf{v}) = \prod_{k=1}^K p(y_k)$ 周辺分布密度関数の積

とおき, これらのKLを分離行列 W に関して最小化すれば独立

$$KL(W) = \int p(\mathbf{y}) \log \frac{p(\mathbf{y})}{\prod_{k=1}^K p(y_k)} d\mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \text{最小化}$$

参考: エントロピーとしての解釈 (cont'd)

$$KL(W) = \int p(\mathbf{y}) \log \frac{p(\mathbf{y})}{\prod_{k=1}^K p(y_k)} d\mathbf{y}$$

$$= -H(\mathbf{Y}; W) + \sum_{k=1}^K H(Y_k; W)$$

1. 結合エントロピー

2. 周辺エントロピー和

$$\begin{aligned} H(\mathbf{Y}; W) &= -\int p(\mathbf{y}) \log p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= -\int p(\mathbf{x}) (\log p(\mathbf{x}) - \log |\mathbf{W}|) d\mathbf{x} \\ &= H(\mathbf{X}) + \log |\mathbf{W}| \quad (\because p(\mathbf{y}) = p(\mathbf{x}) / |\mathbf{W}|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(Y_k; W) &= -\int p(\mathbf{y}) \log p(y_k) d\mathbf{y} \\ &= -\int p(\mathbf{x}) \log p(y_k) d\mathbf{x} \\ &\quad (\because p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}) \end{aligned}$$

参考: エントロピーとしての解釈 (cont'd)

$$KL(W) = \int p(\mathbf{y}) \log \frac{p(\mathbf{y})}{\prod_{k=1}^K p(y_k)} d\mathbf{y}$$

$$= -H(\mathbf{Y}; W) + \sum_{k=1}^K H(Y_k; W)$$

1. 結合エントロピー

2. 周辺エントロピー和

$$H(\mathbf{Y}; W) =$$

=

=

$$H(Y_k; W) =$$

=

この値を最大化

⇒ 音源間の関連を無くす

この値を最小化

⇒ 個々の音を非ガウス化

周期的な不規則信号1

- 以下のように周期的な (Fourier級数展開可能な) 自己相関関数をもつ不規則信号 $x(t)$ を考える

$$R(\tau + T) = R(\tau), \quad \forall \tau$$

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0\tau}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_0^T R(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

- このとき以下が成り立つ
 - $x(t)$ もFourier級数展開できる
 - $x(t)$ の次数の異なるFourier係数は互いに無相関となる

周期的な不規則信号2

- $x(t)$ の時刻 $[0, T]$ の区間を用いて a_n を

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(u) e^{-jn\omega_0 u} du$$

とする。このとき,

$$\mathbb{E} \left[\left| x(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} \right|^2 \right] = 0$$

となることを示す。

- ただし, $\mathbb{E}[x(t)] = 0$ とする。よって, $\mathbb{E}[a_n] = 0$ 。

周期的な不規則信号のFourier級数展開1

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left| x(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} \right|^2 \right] \\ &= \mathbb{E} [|x(t)|^2] \\ & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{E} [a_n^* x(t)] e^{-jn\omega_0 t} \\ & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{E} [a_n x^*(t)] e^{jn\omega_0 t} \\ & + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{E} [a_k a_n^*] e^{j(k-n)\omega_0 t} \end{aligned}$$

周期的な不規則信号のFourier級数展開2

■ 第二項(または第三項)の計算

- $a_n^* = \frac{1}{T} \int_0^T x^*(u) e^{jn\omega_0 u} du$ より

$$\mathbb{E}[a_n^* x(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}[x(t)x^*(u)] e^{jn\omega_0 u} du$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T R(t-u) e^{jn\omega_0 u} du$$

$$= -\frac{1}{T} \int_t^{t-T} R(\tau) e^{jn\omega_0(t-\tau)} d\tau$$

$$= \left(\frac{1}{T} \int_{t-T}^t R(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \right) e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \alpha_n e^{jn\omega_0 t}$$

周期的な不規則信号のFourier級数展開3

■ 第四項の計算

$$\bullet \mathbb{E}[a_k a_n^*] = \begin{cases} \alpha_n & (k = n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore & \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}[a_n^* x(u)] e^{-jk\omega_0 u} du \\ &= \frac{1}{T} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}[x(u)x^*(t)] e^{jn\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 u} dt du \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{T} \int_0^T R(u-t) e^{-jn\omega_0(u-t)} dt \right) e^{-j(k-n)\omega_0 u} du \\ &= \frac{\alpha_n}{T} \int_0^T e^{-j(k-n)\omega_0 u} du \end{aligned}$$

周期的な不規則信号のFourier級数展開4

■ 第四項の計算(続き)

$$\bullet \mathbb{E}[a_k a_n^*] = \begin{cases} \alpha_n & (k = n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[a_k a_n^*] e^{j(k-n)\omega_0 t} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$$

周期的な不規則信号のFourier級数展開5

■ 自己相関関数と展開係数の総和

$$\blacksquare R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0\tau}$$

$$\therefore R(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n$$

■ 自己相関関数の性質より $R^*(\tau) = R(-\tau)$ なので

$$R(-\tau) = R^*(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^* e^{-jn\omega_0\tau}$$

$$\therefore R(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^*$$

周期的な不規則信号のFourier級数展開6

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left| x(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} \right|^2 \right] \\ &= R(0) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} \\ &\quad - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^* e^{-jn\omega_0 t} e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \\ &= R(0) - R(0) - R(0) + R(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karhunen–Loève (KL) 展開

- $x(t)$ が周期信号の場合

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}$$

- $e^{jn\omega_0 t}$ は関数系として互いに直交
- 展開係数 a_n も確率的に互いに直交 (無相関)

- $x(t)$ が一般の信号の場合

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \phi_n(t)$$

- $\phi_n(t)$ は関数系として互いに直交,
展開係数 b_n も確率的に互いに直交 (無相関) となる
表現をKarhunen–Loève (KL) 展開という