信号処理論第二
第8回 (11/27)

情報理工学系研究科システム情報学専攻
猿渡 洋
hiroshi_saruwatari@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

信号処理論第二　講義予定(金曜2限)

- 9/25: 第1回
- 10/02: 第2回
- 10/09: 第3回
- 10/16: 第4回
- 10/23: 第5回
- 10/30: 第6回
- 11/06: 第7回
- 11/27: 第8回
- 12/04: 第9回
- 12/11: 第10回
- 12/18: 第11回
- 12/25: 第12回
- 1/08: 第13回
- 01/22: 期末試験(予定)

※2020年度は全て90分講義とする(10時25分～11時55分)

講義内容

- δ関数再考
- δ関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

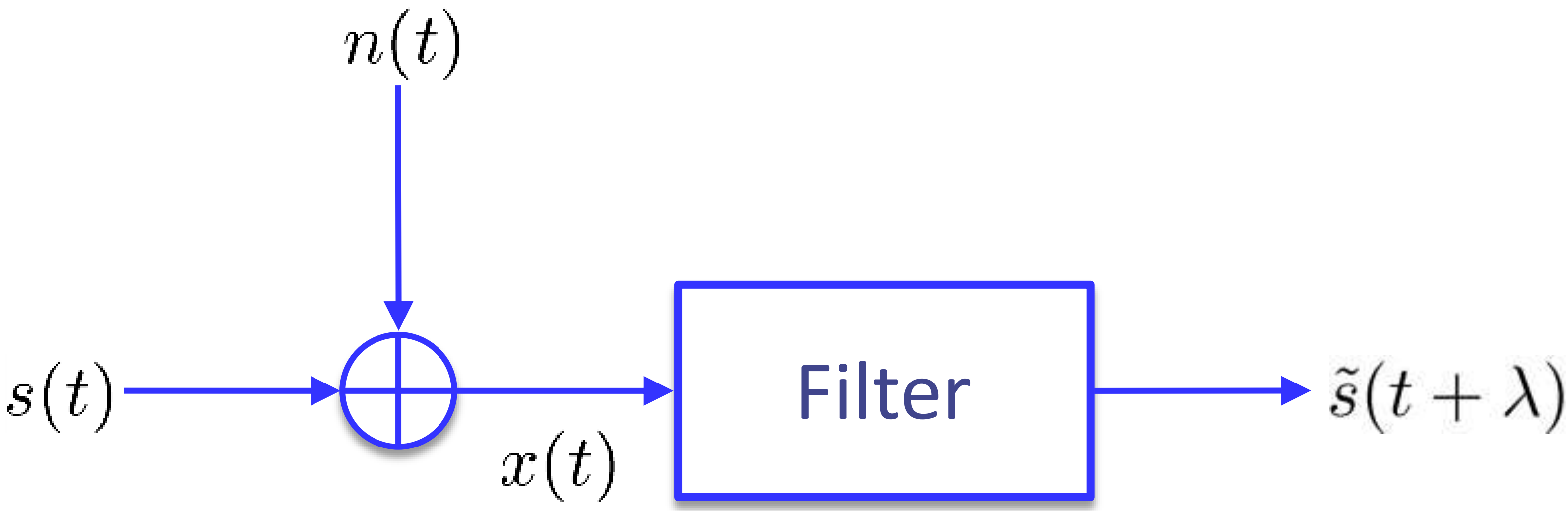
講義資料と成績評価

- 講義資料
  - システム1研HP　http://www.sp.ipc.i.u-tokyo.ac.jp/ からダウンロードできるようにしてあります
- 成績評価
  - 学期末試験

第7章：線形二乗平均推定とWienerフィルタ

信号の推定問題

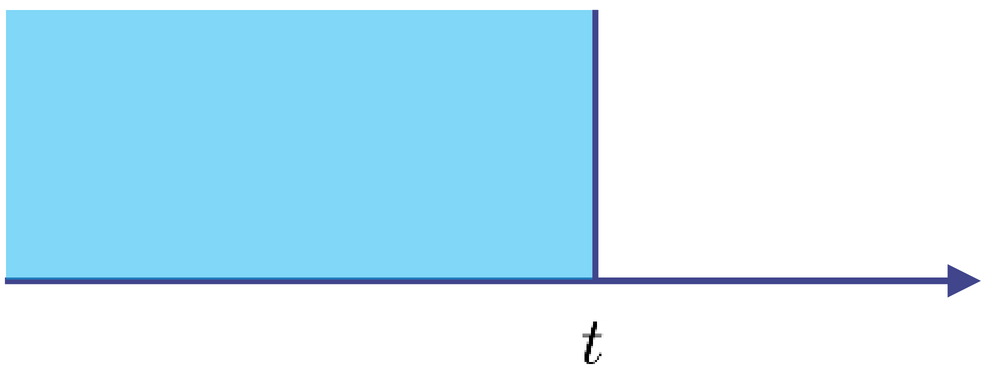
- 雑音$n(t)$が重畳する観測信号$x(t)$からどうやって信号成分$s(t)$を推定するか？



$$\boxed{x(t) = s(t) + n(t)}$$

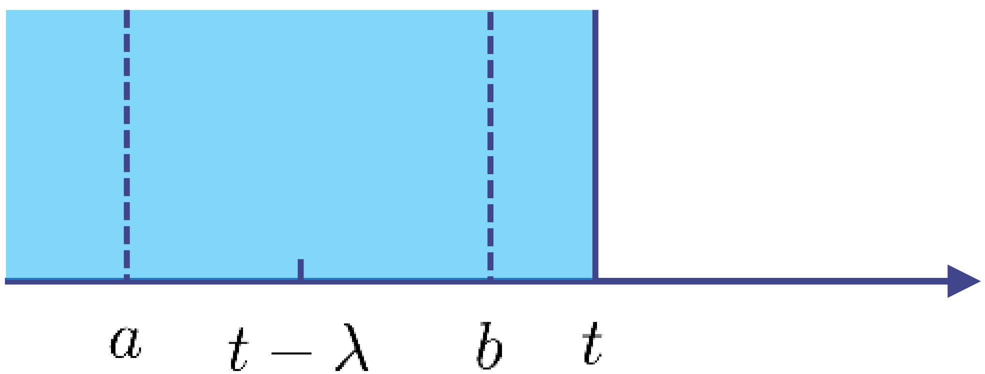
推定問題の分類1

- Filtering (濾波) $x(t) \longrightarrow \tilde{s}(t)$
  - $(-\infty, t]$ の観測信号を用いて時刻 t の信号を推定



推定問題の分類2

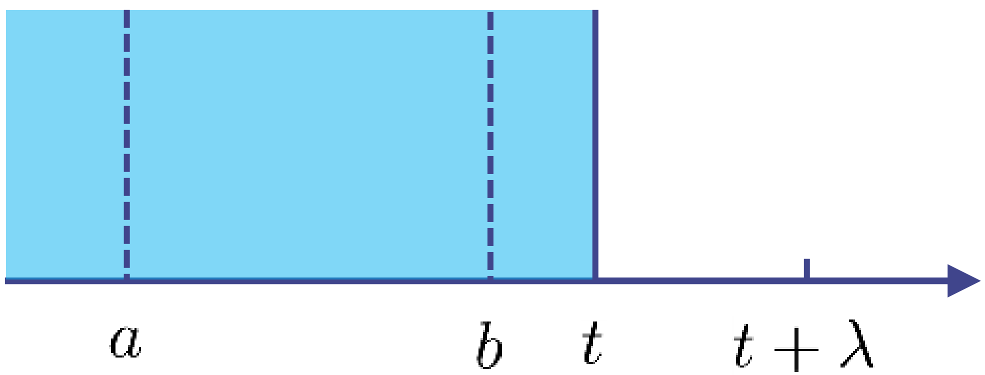
- Smoothing (平滑) $x(t) \longrightarrow \tilde{s}(t-\lambda)$
  - $(-\infty, t]$ の観測信号を用いて時刻 $t-\lambda$ の信号を推定(推定に未来の情報を利用)



  - 特に, 2点 $x(a)$, $x(b)$, $(a < t-\lambda < b < t)$ から $\tilde{s}(t-\lambda)$ を推定するとき, 内挿(Interpolation)という

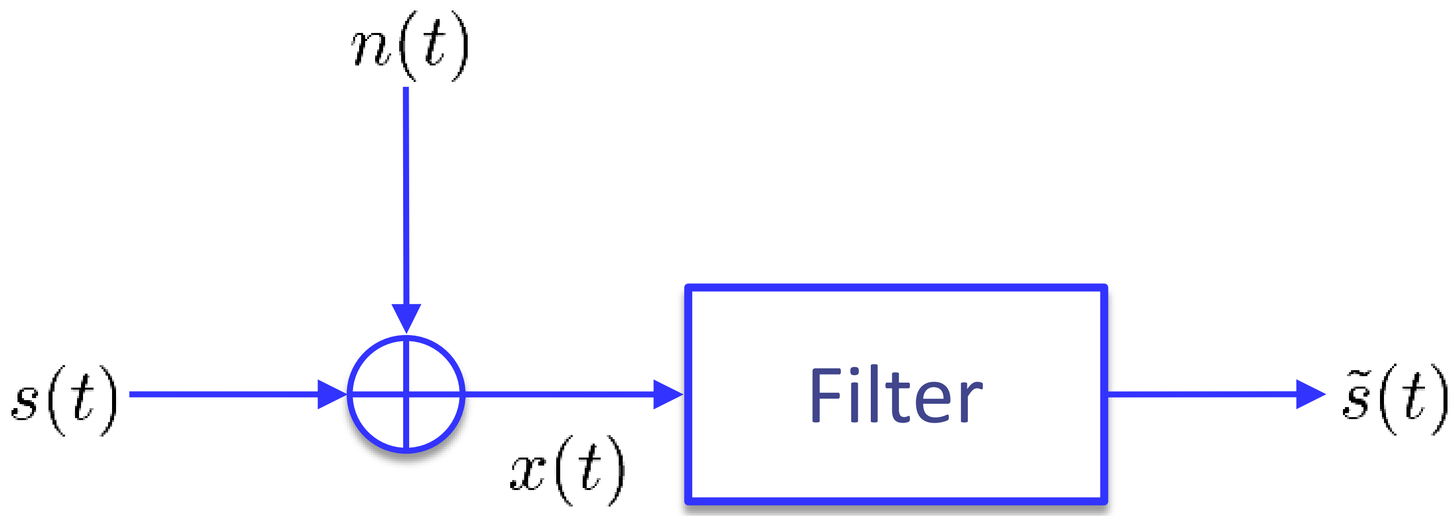
推定問題の分類3

- Prediction (予測)　$x(t) \longrightarrow \tilde{s}(t+\lambda)$
  - $(-\infty, t]$ の観測信号を用いて時刻 $t+\lambda$ の信号を推定(未来の信号を予測)



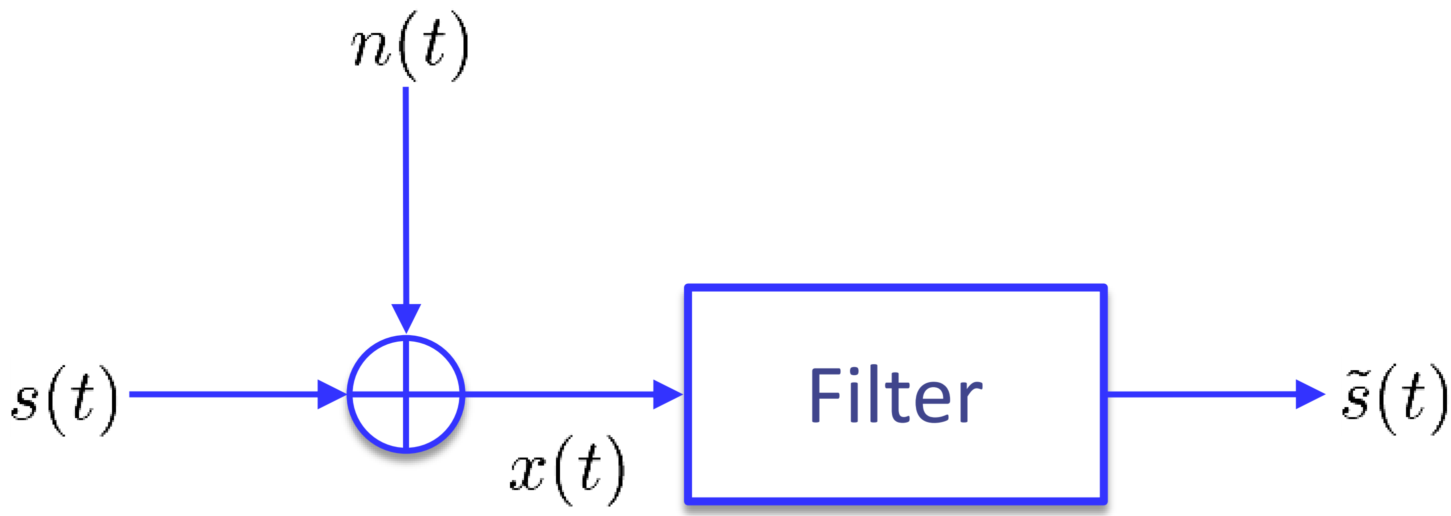
  - 特に, 2点 $x(a)$, $x(b)$, $(a<b<t<t+\lambda)$ から $\tilde{s}(t+\lambda)$ を推定するとき, 外挿(Extrapolation)という

定常確率過程に対するFiltering問題



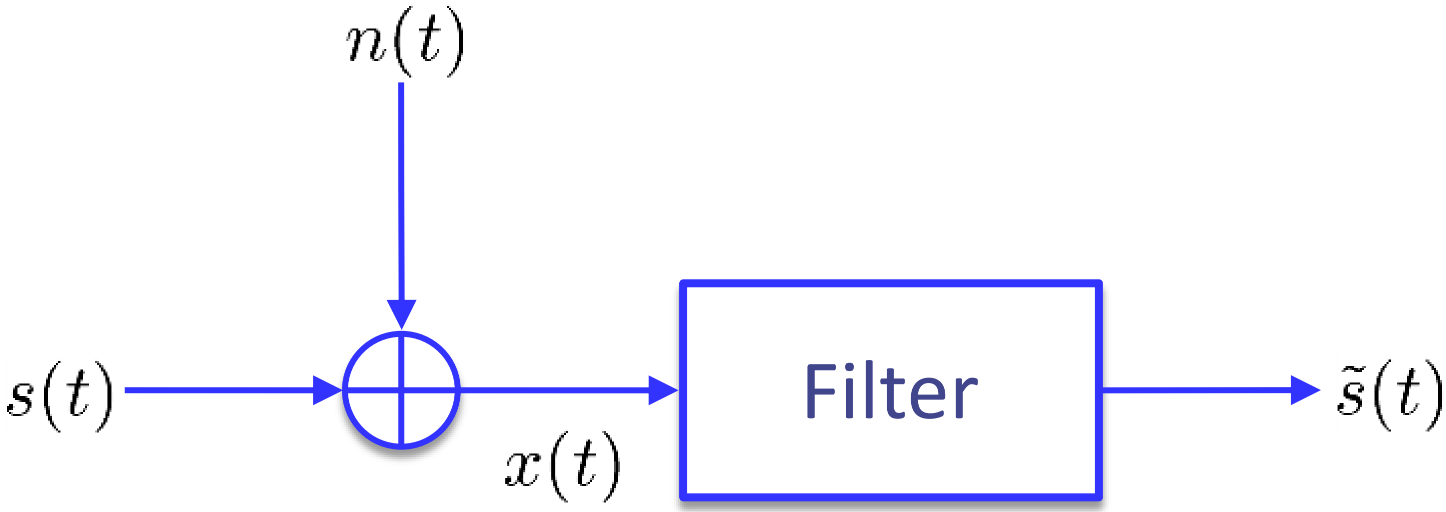
- 何が既知で何が未知か？
  - 目的信号$s(t)$は既知か未知か？決定論信号か確率過程か？確率過程ならばパワースペクトルは既知か？
  - 一般に雑音$n(t)$は確率過程と仮定されるので、パワースペクトルのみが既知と想定される

定常確率過程に対するFiltering問題



- 推定の「良さ」を何で測るか？
  - SN比最大化
  - 平均二乗誤差　→　最小平均二乗誤差推定 (Minimum Mean Square Error (MMSE) Estimation)
  - 尤度　→　最尤推定 (Maximum Likelihood (ML) Estimation)
- どうやって推定するか？フィルターに制約はあるのか？

定常確率過程に対するFiltering問題



- 2つの線形推定法を紹介する
  - マッチトフィルタ：　目的信号が既知＋SN比最大化規範
  - Wienerフィルタ：　目的信号が確率過程＋MMSE規範
- 非因果的なフィルタと因果的なフィルタ

線形推定法1：決定論的信号の推定

- 線形推定器

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

  - 観測データ$x(t)$の中に$s(t)$が含まれているか否か判定する

- $s(t)$は決定論的信号でかつ既知、$n(t)$は確率信号とする
- 信号対雑音比（SN比）最大化規範

$$J(t=t_0) = \frac{|h(t) * s(t)|^2_{t=t_0}}{\mathrm{E}[|h(t) * n(t)|^2]_{t=t_0}}$$

  - Jを指定された時刻$t=t_0$にて最大にする$h(t)$を求めることがここでの問題

マッチトフィルタ(1)

- $n(t)$はパワースペクトル$S_{nn}(\omega)$を持つ確率過程とすると

$$\mathrm{E}[|h(t) * n(t))|^2] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{nn}(\omega)|H(\omega)|^2 d\omega$$

  - ただし$H(\omega)$は$h(t)$のシステム伝達関数

- $t=t_0$における$s(t)$のフィルタリング後出力は

$$(h(t) * s(t))|_{t=t_0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)H(\omega)e^{j\omega t_0} d\omega$$

- 上式に以下の恒等式を適用する

$$S(\omega)H(\omega) = \frac{S(\omega)}{\sqrt{S_{nn}(\omega)}} \cdot H(\omega)\sqrt{S_{nn}(\omega)}$$

マッチトフィルタ(2)

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx$$

- コーシーシュワルツの不等式を適用すると

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)H(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{S_{nn}(\omega)}d\omega \int_{-\infty}^{\infty} S_{nn}(\omega)|H(\omega)|^2 d\omega$$

よって

$$J(t=t_0) = \frac{|h(t)*s(t)|^2_{t=t_0}}{\mathrm{E}[|h(t)*n(t)|^2]_{t=t_0}} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{S_{nn}(\omega)}d\omega$$

- 上記において、等号成立の時に*J*が最大値をとる。従って、最適なフィルタは以下を満たす(*k*は適当な定数)。

$$\sqrt{S_{nn}(\omega)}H(\omega) = k\frac{S^*(\omega)}{\sqrt{S_{nn}(\omega)}}e^{-j\omega t_0}$$

マッチトフィルタ(2)

補足

- 二乗可積分関数空間のコーシーシュワルツ不等式

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx$$

ここで右のようにおく $f^*(\omega) = \dfrac{S(\omega)}{\sqrt{S_{nn}(\omega)}} e^{j\omega t_0} \Longrightarrow |f(\omega)|^2 = \dfrac{|S(\omega)|^2}{S_{nn}(\omega)}$

$$g(\omega) = \sqrt{S_{nn}(\omega)}H(\omega) \Longrightarrow |g(\omega)|^2 = S_{nn}(\omega)|H(\omega)|^2$$

$$\therefore \left|\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)H(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{S_{nn}(\omega)}d\omega \int_{-\infty}^{\infty} S_{nn}(\omega)|H(\omega)|^2 d\omega$$

- 上式両辺を $\mathrm{E}[|h(t) * n(t))|^2] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S_{nn}(\omega)|H(\omega)|^2 d\omega$ で除算すると

$$J(t = t_0) = \frac{|h(t) * s(t)|^2_{t=t_0}}{\mathrm{E}[|h(t) * n(t)|^2]_{t=t_0}} \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{S_{nn}(\omega)}d\omega$$

マッチトフィルタ(3)

- よって最適フィルタ(これを「マッチトフィルタ」と呼ぶ)は

$$\boxed{H(\omega) = k\frac{S^*(\omega)}{S_{nn}(\omega)}e^{-j\omega t_0}}$$

- 例えば雑音$n(t)$がホワイトノイズの場合、$S_{nn}(\omega)=N_0$となり

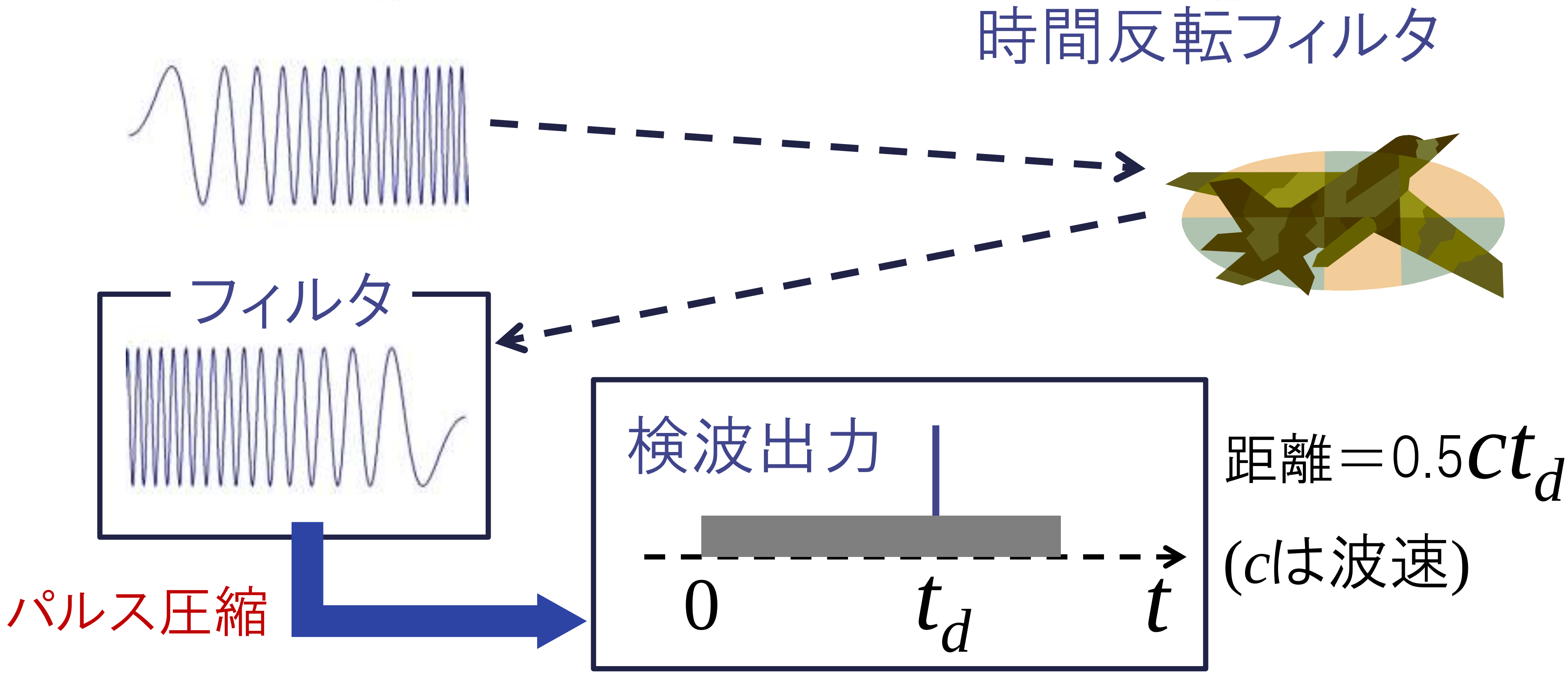
$$H(\omega) = \frac{k}{N_0}S^*(\omega)e^{-j\omega t_0} \Longleftrightarrow h(t) = \frac{k}{N_0}s(t_0 - t)$$

目的信号の時間反転信号

マッチトフィルタ実用例：レーダ・ソーナ信号処理

- チャープ信号を送波し、物体から跳ね返ってきた反射波を検出する。⇒伝搬時間から物体までの距離を測る

$$H(\omega) = \frac{k}{N_0} S^*(\omega) e^{-j\omega t_0} \Longleftrightarrow h(t) = \frac{k}{N_0} s(t_0 - t)$$



線形推定法2:確率過程の推定

- 線形推定器

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

  - 観測データ $x(t-\tau)$ の線形結合で推定信号をモデル化

- 平均二乗誤差最小規範

$$J[h(t)] = \mathbb{E}[|\tilde{s}(t) - s(t)|^2]$$

  - J を最小にする $h(t)$ を求めることがここでの問題

平均二乗誤差の導出

- $$\begin{aligned} J[h] =& \mathbb{E}\left[\left|s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right|^2\right] \\ =& \mathbb{E}[|s(t)|^2] - 2\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\mathbb{E}[s(t)x(t-\tau)]d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)\mathbb{E}[x(t-\tau)x(t-\sigma)]d\sigma \\ =& R_{ss}(0) - 2\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)R_{sx}(\tau)d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)R_{xx}(\tau-\sigma)d\sigma \end{aligned}$$

最適推定器の導出1: 変分法

- $h_0(t)$ が $J[h(t)]$ を最小にする条件は,
  任意の関数 $\eta(t)$ に対して

$$\left.\frac{\partial J\left[h_0(t)+\epsilon\eta(t)\right]}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=0$$

  が成立することである

平均二乗誤差の変分

- $$\begin{aligned} J[h_0+\epsilon\eta] &= \mathbb{E}\left[\left|s(t)-\int_{-\infty}^{\infty}\{\underline{h_0(\tau)}+\epsilon\underline{\eta(\tau)}\}x(t-\tau)d\tau\right|^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left|s(t)-\underline{\hat{s}(t)}-\epsilon\underline{f(t)}\right|^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(s(t)-\hat{s}(t))^2\right] \\ &\quad -2\epsilon\mathbb{E}[(s(t)-\hat{s}(t))f(t)]+\epsilon^2\mathbb{E}\left[f(t)^2\right] \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \left.\frac{\partial J[h_0+\epsilon\eta]}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} &= -2\mathbb{E}[(s(t)-\hat{s}(t))f(t)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

平均二乗誤差の変分

- $$\mathbb{E}[s(t)f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau)\underbrace{\mathbb{E}[s(t)x(t-\tau)]}_{R_{sx}(\tau)}d\tau$$

- $$\mathbb{E}[\hat{s}(t)f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau)\mathbb{E}[\hat{s}(t)x(t-\tau)]d\tau$$
  $$= \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} h_0(\sigma)\underbrace{\mathbb{E}[x(t-\tau)x(t-\sigma)]}_{R_{xx}(\tau-\sigma)}d\sigma d\tau$$

- 任意の $\eta(\tau)$ で上記が等しくなるためには・・・

$$\boxed{\text{参考：}\quad g(z)=0,\ \forall z \Leftrightarrow \int w(z)g(z)dz,\ \forall w}$$

Wiener-Hopfの積分方程式

- 最小二乗誤差を与えるフィルタが満たすべき条件

$$R_{sx}(\tau) - \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - \sigma) h_0(\sigma) d\sigma = 0$$

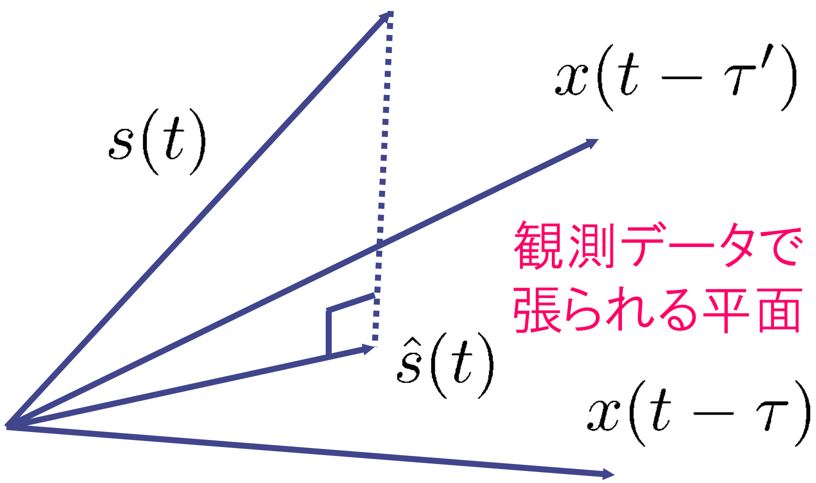
最適推定器の導出2: 直交原理

- 線形推定器　が平均二乗誤差を最小にするとき以下が成り立つ
  - 直交原理 I：誤差が観測と直交

    $$\mathbb{E}[\{s(t)-\hat{s}(t)\}x(t-\tau)]=0$$

  - 直交原理 II：誤差が最適推定値と直交

    $$\mathbb{E}[\{s(t)-\hat{s}(t)\}\hat{s}(t)]=0$$



離散系の直交原理

- n 個の確率変数 $s_1, s_2, \ldots, s_N$ から
  $\hat{s}_0 = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_N s_N$
  によって s_0 を推定する問題を考える

- $I = \mathbb{E}[|s_0 - \hat{s}_0|^2]$ を最小とする $a_1, a_2, \ldots, a_N$ は？

  - ただし，$n = 0, 1, \ldots, N$ に対して

$$\begin{cases} \mathbb{E}[s_n] = 0 \\ R_{nm} = \mathbb{E}[s_n s_m^*] \end{cases}$$

  とする

直交原理 I の確認 (1/2)

- $\mathbb{E}[(s_0 - \hat{s}_0)s_n^*] = 0 \ \ (n = 1, \ldots, N)$
  を満足する $\hat{s}_0 = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_N s_N$ は
  $I = \mathbb{E}[|s_0 - \hat{s}_0|^2]$ を最小にするか？

直交原理 I の確認 (2/2)

- 任意の定数 $A_1, \dots, A_N$ による推定値の誤差

$$s_0 - (\underbrace{A_1 s_1 + \cdots + A_N s_N}_{})$$

直交原理を満たすとは限らない任意の線形推定値

$$= s_0 - (\underbrace{a_1 s_1 + \cdots + a_N s_N}_{}) + (a_1 - A_1)s_1 + \cdots + (a_N - A_N)s_N$$

直交原理を満たす線形推定値

- $$\mathbb{E}[|s_0 - (A_1 s_1 + \cdots + A_N s_N)|^2]$$

$$= \mathbb{E}[|s_0 - \hat{s}_0|^2] + \mathbb{E}[|(a_1 - A_1)s_1 + \cdots + (a_N - A_N)s_N|^2]$$

$$\geq \mathbb{E}[|s_0 - \hat{s}_0|^2]$$

直交原理よりクロスターム $\mathbb{E}[(s_0 - \hat{s}_0)s_n^*]$ は0

直交原理を満たす線形推定値が平均二乗誤差最小

最適推定値の平均二乗誤差

- $\hat{s}_0$ が $E[(s_0 - \hat{s}_0)\hat{s}_0^*] = 0$ (直交原理 II)
を満たすとき，
$E[s_0\hat{s}_0^*](= E[s_0^*\hat{s}_0]) = E[|\hat{s}_0|^2]$ であるから，

$$
\begin{aligned}
I &= E[|s_0 - \hat{s}_0|^2] \\
&= E[(s_0 - \hat{s}_0)(s_0^* - \hat{s}_0^*)] \\
&= E[|s_0|^2] - E[\hat{s}_0 s_0^*] - E[s_0\hat{s}_0^*] + E[|\hat{s}_0|^2] \\
&= E[|s_0|^2] - E[|\hat{s}_0|^2] \quad \text{（ピタゴラスの定理に相当）}
\end{aligned}
$$

最適推定値の導出1

- $E[(s_0 - \hat{s}_0)s_n^*] = 0$ (直交原理 I) より
  $E[s_0 s_n^* - a_1 s_1 s_n^* - \cdots - a_N s_N s_n^*] = 0 \quad (n = 1, \cdots, N)$
  すなわち,

$$
\begin{aligned}
R_{01} &= a_1 R_{11} + \cdots + a_N R_{N1} \\
R_{02} &= a_1 R_{12} + \cdots + a_N R_{N2} \\
&\vdots \\
R_{0N} &= a_1 R_{1N} + \cdots + a_N R_{NN}
\end{aligned}
$$

最適推定値の導出2

$$\begin{pmatrix} R_{01} \\ \vdots \\ R_{0n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & \cdots & R_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{1n} & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & \cdots & R_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{1n} & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R_{01} \\ \vdots \\ R_{0n} \end{pmatrix}$$

直交原理によるWiener-Hopf積分方程式の導出

- $\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha$ とすると，

  $E[\{s(t) - \hat{s}(t)\}x(t-\tau)] = 0$ より，

  $$E\left[\left\{s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha\right\}x(t-\tau)\right] = 0$$

  $$E[\{s(t)x(t-\tau)\}] = E\left[\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha\right\}x(t-\tau)\right]$$

  $$\therefore R_{sx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

Wiener-Hopf積分方程式の解法

- $h(t)$ が非因果的なフィルタの場合

$$R_{sx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - \alpha) h(\alpha) d\alpha$$

両辺をFourier変換

$$S_{sx}(\omega) = S_{xx}(\omega) H(\omega) \longrightarrow H(\omega) = \frac{S_{sx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}$$

- $R_{sn}(\tau) = 0$ の場合

$$R_{sx}(\tau) = R_{ss}(\tau), \quad R_{xx}(\tau) = R_{ss}(\tau) + R_{nn}(\tau)$$

$$\boxed{H(\omega) = \frac{S_{ss}(\omega)}{S_{ss}(\omega) + S_{nn}(\omega)}}$$

非因果的Wienerフィルタ

非因果的Wienerフィルタ　補足

- $h(t)$ が非因果的なフィルタの場合

$$\boxed{H(\omega) = \frac{S_{ss}(\omega)}{S_{ss}(\omega) + S_{nn}(\omega)}}$$

非因果的Wienerフィルタ

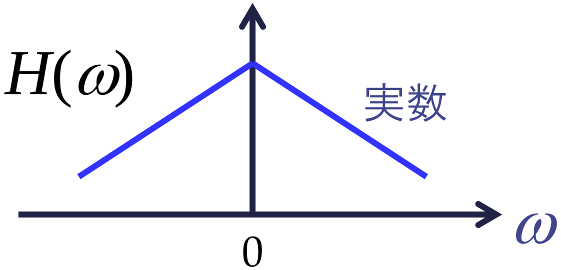
- 非因果的であることの証明

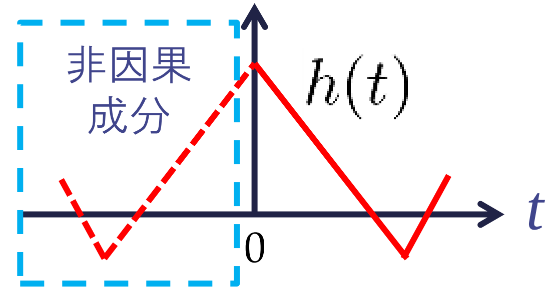
$H(\omega)$ は実数かつ偶関数

$$\Rightarrow \; h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = h(-t)$$

$\Rightarrow$ $h(t)$も実数かつ偶関数

$\Rightarrow$ 非零な非因果成分（$h(t)|_{t<0}$）を必ず含む





統計推定における音色の差

白色ノイズの場合

観測音

最尤推定

Wienerフィルタ

ベイズ推定

人ごみノイズの場合

観測音

最尤推定

Wienerフィルタ

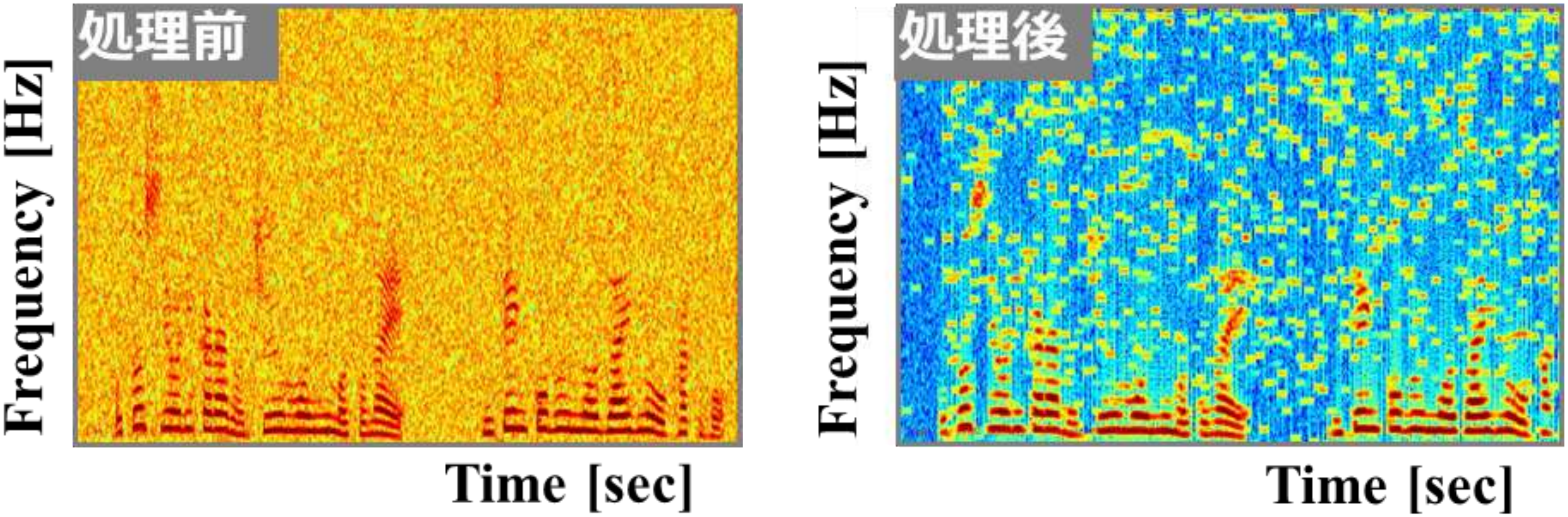
ベイズ推定

統計推定における音色の差

補足

Wienerフィルタの結果をスペクトログラムで眺めてみる

観測音　　Wienerフィルタ



MMSE規範のもとで線形推定器としては最良であるが、
確率過程特有のランダムな推定誤差（残差）が現れる
⇒　耳障りな音の原因となる
⇒　時変推定器で解決（カルマンフィルタ・ベイズ推定）