信号処理論第二
第10回 (12/11)

情報理工学系研究科システム情報学専攻
猿渡 洋
hiroshi_saruwatari@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

信号処理論第二　講義予定(金曜2限)

- 9/25: 第1回
- 10/02: 第2回
- 10/09: 第3回
- 10/16: 第4回
- 10/23: 第5回
- 10/30: 第6回
- 11/06: 第7回
- 11/27: 第8回
- 12/04: 第9回
- 12/11: 第10回
- 12/18: 第11回
- 12/25: 第12回
- 1/08: 第13回
- 01/22: 期末試験(予定)

※2020年度は全て90分講義とする(10時25分～11時55分)

講義内容

- δ関数再考
- δ関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

講義資料と成績評価

- 講義資料
  - システム1研HP　http://www.sp.ipc.i.u-tokyo.ac.jp/ からダウンロードできるようにしてあります
- 成績評価
  - 学期末試験

第8章
ヒルベルト変換と最小位相関数

Wiener-Hopf積分方程式の解法 (因果性) 復習

- $$y(\tau) = R_{sx}(\tau) - \int_0^\infty R_{xx}(\tau - \alpha)h(\alpha)d\alpha$$
  - $y(\tau) = 0\ (\tau > 0)$ 反因果性関数(anticausal function)
  - $h(\tau) = 0\ (\tau < 0)$ 因果性関数(causal function)

となる $y,\ h$ を見つければ良い

- y の導入により $\tau > 0$ の条件はもう考えなくて良い

Laplace変換を用いた因果性の表現

復習

- y, h を見つける問題をLaplace変換で表現
  - y, h のLaplace変換を $Y(p)$, $H(p)$ とすると

$$Y(p) = S_{sx}(-jp) - S_{xx}(-jp)H(p)$$

$$\begin{cases} Y(p) & \mathrm{Re}[p] < 0 \ \text{で解析的（極がない）} \\ H(p) & \mathrm{Re}[p] > 0 \ \text{で解析的（極がない）} \end{cases}$$

なる $Y(p)$, $H(p)$ を見つける問題と等価

- $F(p)$ が右半平面で解析的（極をもたない）ならば,
  $f(t)$はBIBO安定で因果的なフィルタ

因果性を満たしたW-H方程式の解法　復習

- W-H方程式：$Y(p) = S_{sx}(-jp) - S_{xx}(-jp)H(p)$

（I）　$S_{xx}(-jp) = A^{+}(p)A^{-}(p)$

$$\therefore \frac{Y(p)}{A^{-}(p)} = \frac{S_{sx}(-jp)}{A^{-}(p)} - A^{+}(p)H(p)$$

（II）　$\dfrac{S_{sx}(-jp)}{A^{-}(p)} = B^{+}(p) + B^{-}(p)$

$$\frac{Y(p)}{A^{-}(p)} = B^{+}(p) + B^{-}(p) - A^{+}(p)H(p)$$

（III）　$\boxed{\dfrac{Y(p)}{A^{-}(p)} - B^{-}(p)} = \boxed{B^{+}(p) - A^{+}(p)H(p)} = 0$

$\mathrm{Re}[p] < 0$で解析的　　$\mathrm{Re}[p] > 0$で解析的

因果関数の性質

- Laplace変換が右半平面で解析的（極をもたない）
- Fourier変換の実部R(ω)と虚部X(ω)がHilbert変換対

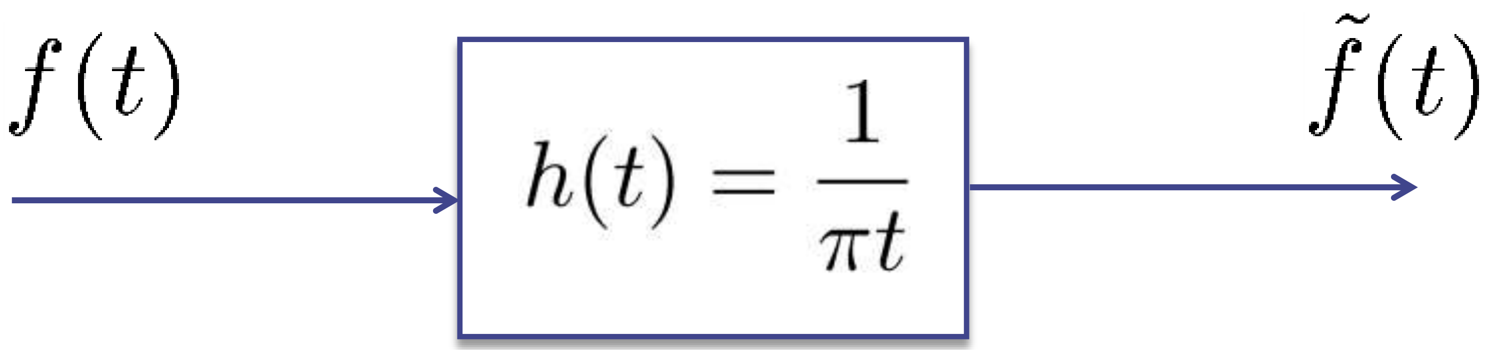
$$
\begin{cases}
X(\omega) = \dfrac{-1}{\pi\omega} * R(\omega) = \dfrac{-1}{\pi}\mathrm{p.v.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(y)}{\omega - y}\mathrm{d}y \\
R(\omega) = \dfrac{1}{\pi\omega} * X(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(y)}{\omega - y}\mathrm{d}y
\end{cases}
$$

p.v. : Cauchy principal value（コーシーの主値）

Hilbert変換

- $h(t) = \dfrac{1}{\pi t}$ という関数との畳み込み

$$\tilde{f}(t) = f(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau$$



$h(t) = 1/\pi t$ のFourier変換

- $\mathrm{sgn}t \longleftrightarrow \dfrac{2}{j\omega}$ （符号関数のFourier変換）

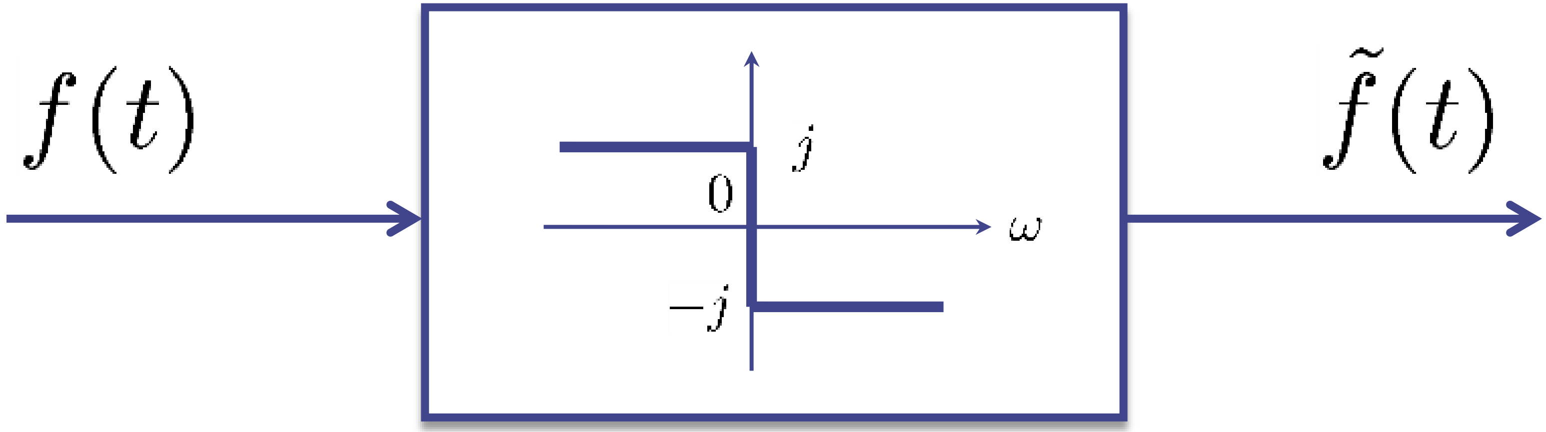
$$\frac{j}{2\pi}\mathrm{sgn}t \longleftrightarrow \frac{1}{\pi\omega}$$

$$\Downarrow$$

$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ （Fourier変換の対称性）

$$\frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow -j\mathrm{sgn}\omega$$

Hilbert変換のフィルタとしての表現



$$H(\omega) = -j\mathrm{sgn}\omega$$

$$\tilde{F}(\omega) = -j\mathrm{sgn}\omega \cdot F(\omega)$$

Hilbert変換の例

- $f(t) = \cos\omega_0 t$

$$F(\omega) = \pi\{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\}$$

$$\tilde{F}(\omega) = -j\pi\{\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\}$$

$$\tilde{f}(t) = \sin\omega_0 t$$

因果関数のFourier変換

- 因果関数： $h(t) = 0, \quad \forall t < 0$

$$g(t) = \frac{h(t) + h^*(-t)}{2} \longrightarrow G(\omega)$$ は実関数

$$h(t) = 2g(t)\underline{U(t)}$$

Heavisideのステップ関数

$$= g(t)(1 + \mathrm{sgn}t)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi}G(\omega) * (2\pi\delta(\omega) + \frac{2}{j\omega})$$

$$= G(\omega) + j\tilde{G}(\omega)$$

Hilbert変換対

- $h(t)$を原点に特異点を持たない因果関数

$$h(t) = 0, \quad \forall t < 0$$

とすると，$h(t)$のFourier変換$H(\omega)$の実部$R(\omega)$と虚部$X(\omega)$の間には

$$\begin{cases} X(\omega) = \dfrac{-1}{\pi\omega} * R(\omega) = \dfrac{-1}{\pi}\mathrm{p.v.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{R(y)}{\omega - y}\mathrm{d}y \\ R(\omega) = \dfrac{1}{\pi\omega} * X(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{X(y)}{\omega - y}\mathrm{d}y \end{cases}$$

なる関係が成立する。このとき$R(\omega)$と$X(\omega)$は「**Hilbert変換対をなす**」という。

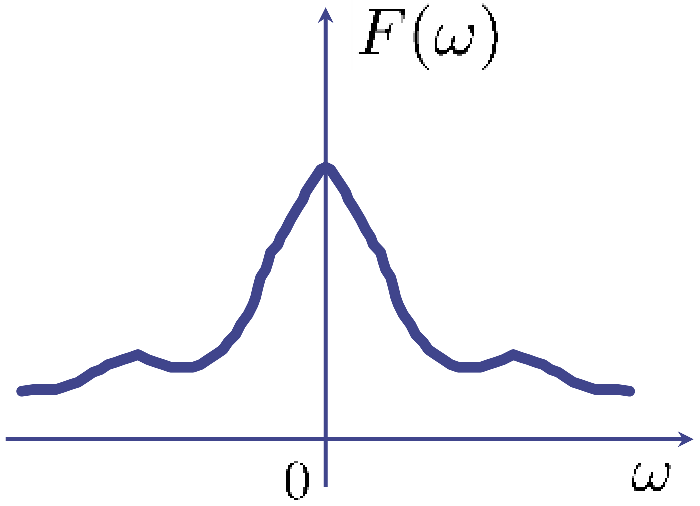
解析信号

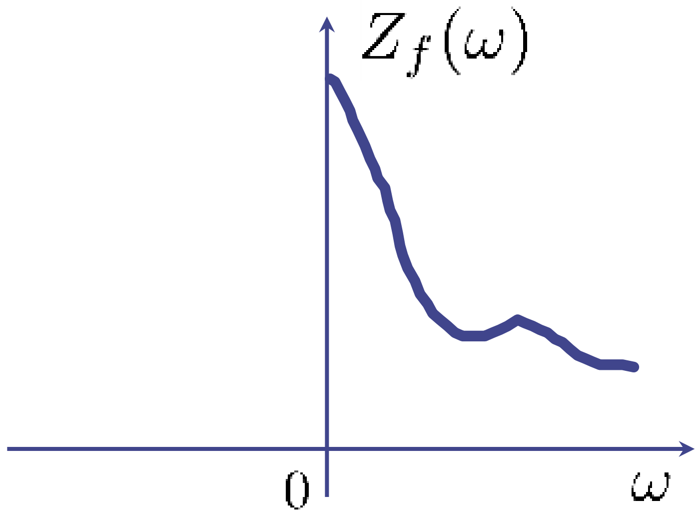
- 負の周波数成分が0の複素信号

$$
\begin{aligned}
z_f(t) &= f(t) + j\tilde{f}(t) \\
Z_f(\omega) &= F(\omega) + j\tilde{F}(\omega) \\
&= F(\omega) - (-1)\mathrm{sgn}\omega \cdot F(\omega) \\
&= F(\omega)(1 + \mathrm{sgn}\omega) \\
&= 2F(\omega)U(\omega)
\end{aligned}
$$

解析信号

- f を実関数とすると





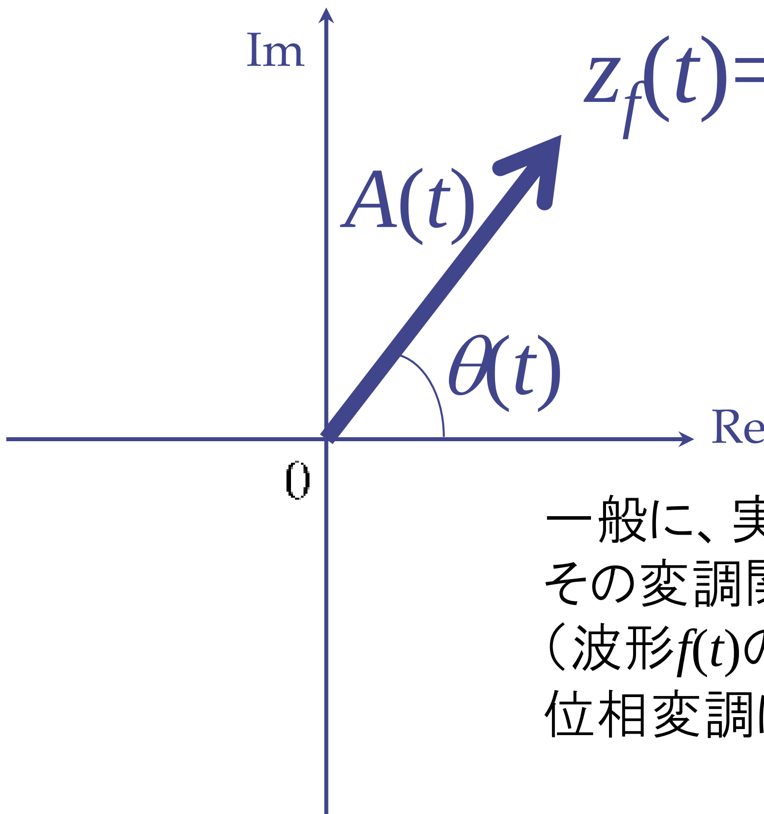
$$z_f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \mathrm{Re} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

解析信号

補足

- なぜ解析信号を考えるのか？



$z_f(t)=A(t)\exp(j\theta(t))$ 変調信号

$$\boxed{\mathrm{Re}[z_f(t)]=f(t)}$$

一般に、実数関数 $f(t)$ を観測しただけでは、
その変調関数$A(t)$や$\theta(t)$を知ることは出来ない。
（波形$f(t)$の時間変化が、振幅変調によるものなのか
位相変調によるものなのか、一意に判断できない）

解析関数を導入することにより、振幅変調関数と
位相変調関数を独立に決定することが出来る

最小位相関数 (minimum phase function)

- 最小位相関数：Laplace変換がRe(p)>0で極も零も持たないような関数

$$H_\mathrm{m}(p) = \frac{(p-q_1)(p-q_2)\cdots(p-q_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n)}$$

$$\mathrm{Re}[p_i] < 0, \mathrm{Re}[q_i] < 0$$

⇩

$$\log H_\mathrm{m}(p) = \sum_i \log(p-q_i) - \sum_i \log(p-p_i)$$

対数をとると零も極も極になる

- 最小位相関数の対数関数は，右半平面で解析的→実部と虚部がHilbert変換対

最小位相関数のゲインと位相

- $H(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ とすると,

$$\log H(j\omega) = \underline{\log A(\omega)} + j\underline{\phi(\omega)}$$

実部がゲイン特性　虚部が位相特性

最小位相関数のゲイン（対数）と位相は
Hilbert変換対の関係となる

全域通過関数 (All-pass function)

- 全域通過関数:
  $|H_0(j\omega)| = 1$ となる安定かつ因果的な関数

性質: 全域通過関数の零点と極は複素平面上で虚軸に関して対称に存在する。すなわち, p_i を極にもつならば, $-p_i^*$ を零点にもつ。

$$H_0(p) = \frac{(p + p_1^*)(p + p_2^*)\cdots(p + p_m^*)}{(p - p_1)(p - p_2)\cdots(p - p_m)}$$

$$\mathrm{Re}[p_i] < 0$$

全域通過関数の振幅特性

- 2つの複素数 M_i, N_i が虚軸に関して対称ならば,

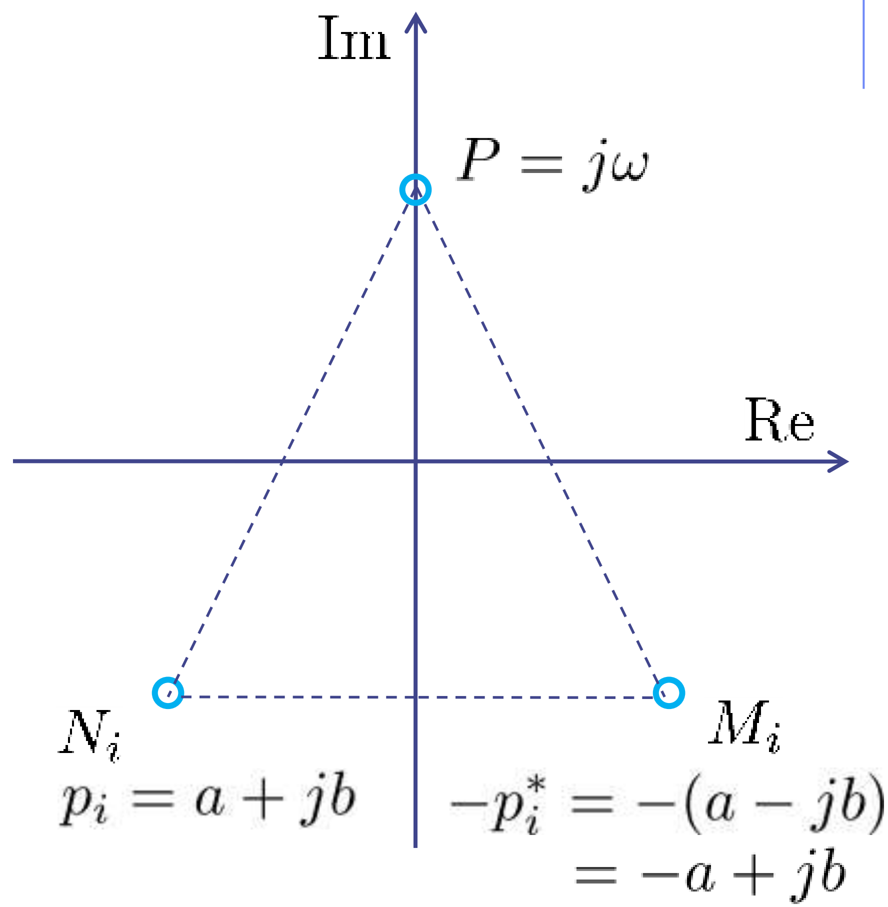
$$\frac{\overline{M_i P}}{\overline{N_i P}} = 1$$

なので, $\forall \omega$ で

$$|j\omega + p_i^*| = |j\omega - p_i|$$

が成立する。

ゆえに $|H_0(j\omega)| = 1$



全域通過関数の性質

- 任意の入力$y(t)$に対する全域通過システムの応答を$g(t)$とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$$

- その時、任意のt_0に対して以下が成立する。

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t_0} |y(t)|^2 dt \geq \int_{-\infty}^{t_0} |g(t)|^2 dt}$$

全域通過関数の性質(続き)

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t_0} |y(t)|^2 dt \geq \int_{-\infty}^{t_0} |g(t)|^2 dt}$$

- 証明：$t>t_0$ で$y(t)$を打ち切って得られる関数$y_1(t)$を考える。このとき全ての$t \leqq t_0$に対して以下が成立する。

$$g_1(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} y_1(\tau)h_0(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)h_0(t-\tau)d\tau = g(t)$$

よって

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{t_0} |y_1(t)|^2 dt}_{= \int_{-\infty}^{t_0} |y(t)|^2 dt} = \int_{-\infty}^{\infty} |g_1(t)|^2 dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{t_0} |g_1(t)|^2 dt}_{= \int_{-\infty}^{t_0} |g(t)|^2 dt} + \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} |g_1(t)|^2 dt}_{\geqq 0}$$

最小位相関数と全域通過関数による表現

- 安定なフィルタ $H(p)$ は最小位相関数 $H_{\mathrm{m}}(p)$ と全域通過関数 $H_0(p)$ の積で表すことができる

最小位相関数と全域通過関数による表現

- 安定なフィルタ $H(p)$ とその振幅が最小位相関数 $H_{\mathrm{m}}(p)$ の振幅と等しいとき、以下のような全域通過関数 $H_0(p)$ を考えることが出来る。

$$H_0(p) = \frac{H(p)}{H_{\mathrm{m}}(p)}$$

なぜなら

$$|H_0(j\omega)| = \frac{|H(j\omega)|}{|H_{\mathrm{m}}(j\omega)|} = 1$$

$H_0(p)$ の極 $\Rightarrow$ $H(p)$ の極か、もしくは $H_{\mathrm{m}}(p)$ の零点

$\Rightarrow$ 安定

最小位相関数と全域通過関数による表現

- 安定なフィルタ $H(p)$ は最小位相関数 $H_{\mathrm{m}}(p)$ と全域通過関数 $H_0(p)$ の積で書くことができる。

$$H_0(p) = \frac{H(p)}{H_{\mathrm{m}}(p)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H(p) = H_{\mathrm{m}}(p) H_0(p)}$$

- このとき、任意のt_0に対して以下が成立する。

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t_0} |y(t)|^2 dt \geq \int_{-\infty}^{t_0} |g(t)|^2 dt}$$

$y(t)$：任意入力に対する $H_{\mathrm{m}}(p)$ の応答

$g(t)$：同じ入力に対する $H(p)$ の応答

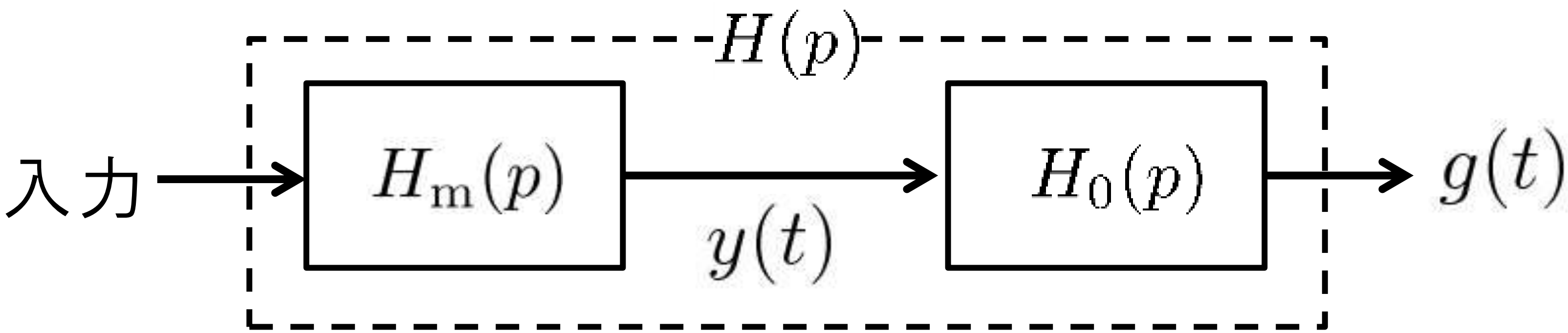
最小位相関数と全域通過関数による表現

- 略証

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t_0} |y(t)|^2 dt \geq \int_{-\infty}^{t_0} |g(t)|^2 dt}$$

$y(t)$：任意入力に対する $H_{\mathrm{m}}(p)$ の応答

$g(t)$：同じ入力に対する $H(p)$ の応答



上記システムにおいて「全域通過関数の性質（前述）」を適用

最小位相関数と全域通過関数による表現

- 物理的な意味

$$\int_{-\infty}^{t_0} |y(t)|^2 dt \geq \int_{-\infty}^{t_0} |g(t)|^2 dt$$

$y(t)$：任意入力に対する $H_{\mathrm{m}}(p)$ の応答

$g(t)$：同じ入力に対する $H(p)$ の応答

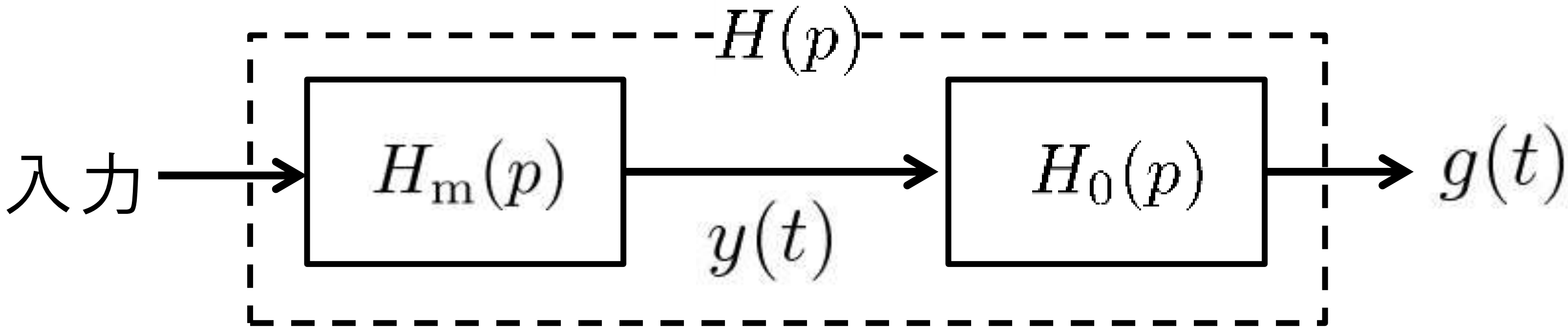
【最小位相性とは？】

⇒　応答成分（の二乗積分）が時刻前半に最も集中する

⇒　同じ振幅スペクトルを持つ伝達関数のクラスの中で最も位相の遅れが少ない

最小位相関数を用いた逆システム

$$H(p) = H_{\mathrm{m}}(p) H_0(p)$$



- 入力・出力間のパワースペクトル比によって、未知システム $H(p)$ の「振幅値」のみが既知の場合、どうやって未知システム（の一部）の逆を求め、システム補正が出来るか？
- 最小位相関数のみならば、補正することが出来る。

最小位相関数を用いた逆システム

1. $|H(j\omega)| = |H_m(j\omega)|\,|H_0(j\omega)| = |H_m(j\omega)|$
2. $\log|H_m(j\omega)|$ のHilbert変換によって、$H_m(j\omega)$の位相関数を決定

$$\log H(j\omega) = \underbrace{\log A(\omega)}_{} + j\underbrace{\phi(\omega)}_{}$$

Hilbert変換対

3. これにより、最小位相関数$H_m(j\omega)$を一意に決定
4. 安定な逆システムを構築

※注意：これによって補正されるのは最小位相関数のみ
全域通過関数は補正することは出来ない