

# 信号処理論第二 第11回 (12/18)

情報理工学系研究科システム情報学専攻  
猿渡 洋

[hiroshi\\_saruwatari@ipc.i.u-tokyo.ac.jp](mailto:hiroshi_saruwatari@ipc.i.u-tokyo.ac.jp)

## 信号処理論第二 講義予定(金曜2眼)

- 9/25: 第1回
- 10/02: 第2回
- 10/09: 第3回
- 10/16: 第4回
- 10/23: 第5回
- 10/30: 第6回
- 11/06: 第7回
- 11/27: 第8回
- 12/04: 第9回
- 12/11: 第10回
- 12/18: 第11回
- 12/25: 第12回
- 1/08: 第13回
- 01/22: 期末試験(予定)

※2020年度は全て90分講義とする(10時25分～11時55分)

# 講義内容

- $\delta$ 関数再考
- $\delta$ 関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

# 講義資料と成績評価

## ■ 講義資料

- システム1研HP <http://www.sp.ipc.i.u-tokyo.ac.jp/>からダウンロードできるようにしてあります

## ■ 成績評価

- 学期末試験

The slide features a minimalist design with blue lines and corner markers. A vertical line on the left and a horizontal line at the top intersect at the top-left corner, with a small blue circle at the intersection. A horizontal line at the bottom and a vertical line on the right intersect at the bottom-right corner, also with a small blue circle at the intersection. The main title is centered in the upper half of the slide.

# 第9章 Kalmanフィルタ

# Wienerフィルタ

- 観測信号 $y(t)$ から信号 $x(t)$ を推定する枠組み
- 線形時不変推定器:

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)y(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)y(t - \tau)d\tau$$

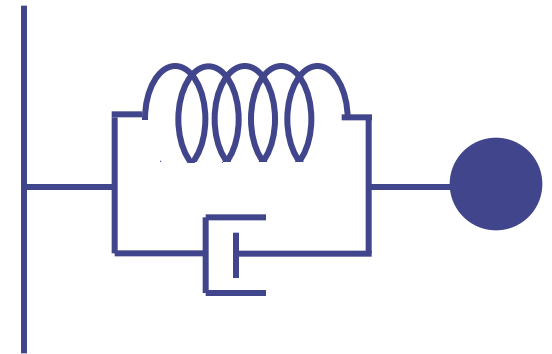
- 最小二乗規範:

$$J[h(t)] = \mathbb{E}[|\hat{x}(t) - x(t)|^2]$$

- $y(t)$ 、 $x(t)$ に対する定常性の仮定が必要

# 測定対象に対するモデルの導入

- 例) バネマスダンパ系の質点位置の推定
  - バネマスダンパ系の質点が、ランダムな外力 $F(t)$ により駆動されている
  - 質点の位置は、観測雑音を含む測定器によって観測される



$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

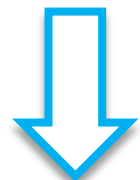
$$y(t) = x(t) + \underline{w(t)}$$

観測雑音

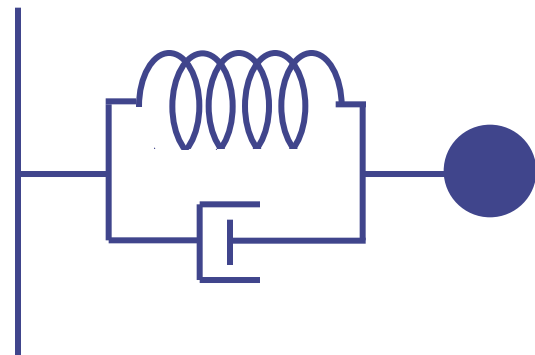
# 状態空間表現への変形

$$\blacksquare m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

$$y(t) = x(t) + w(t)$$



1変数高階微分方程式表現から  
多変数1階微分方程式表現へ



$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\gamma/m) & -(k/m) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1/m)F(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

駆動雑音

$$y(t) = (0 \ 1) \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + w(t)$$

観測雑音

状態空間表現



# Kalmanフィルタの問題設定

- 状態方程式:  $\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t)$   
駆動雑音
- 観測方程式:  $y(t) = C(t)x(t) + w(t)$   
観測雑音

## ■ 仮定

- $v(t)$ 、 $w(t)$ は互いに独立な正規白色雑音

$$E[v(t)] = 0 \quad E[v(t)v^T(\tau)] = V\delta(t - \tau)$$

$$E[w(t)] = 0 \quad E[w(t)w^T(\tau)] = W\delta(t - \tau)$$

$$E[v(t)w^T(\tau)] = 0$$

- システムパラメータ:  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ と、雑音共分散  $W$ ,  $V$ は既知
- $W$ は逆行列をもつ

# Kalmanフィルタの問題設定

- 観測信号  $y(\tau)$  ( $t_0 \leq \tau < t$ ) から状態  $x(t)$  を推定する枠組み

- 線形時変推定器:

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma$$

- 最小二乗規範:

$$J[h(t, \tau)] = \mathbb{E}[|\hat{x}(t) - x(t)|^2]$$

- 実際には、上記の時変インパルス応答を畳み込むことはなく、逐次的な推定が可能

# Kalmanフィルタの導出

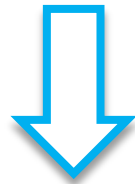
- 1) Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式の導出
- 2) 微分方程式への変形
- 3)  $x$ の逐次推定式の導出
- 4) Kalman ゲインの決定
- 5) 誤差共分散の更新式

# 1. Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式の導出

■  $\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \sigma)y(\sigma)d\sigma$  より

$$\mathbb{E} \left[ \left\{ x(t) - \int_{t_0}^t H(t, \sigma)y(\sigma)d\sigma \right\} y^T(\tau) \right] = 0 \quad \text{直交原理}$$

$(t_0 \leq \sigma < t)$



$$\mathbb{E}[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^t H(t, \sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^T(\tau)]d\sigma$$

$(t_0 \leq \sigma < t)$

Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式

## 2. 微分方程式への変形:方針

### ■ Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式

$$E[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma$$

### ■ 両辺をtで微分し, システムのモデル(状態方程式):

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t)$$

を適用して変形することを考える

## 2. 微分方程式への変形: 左辺の微分

- 左辺を  $t$  で微分

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}[x(t)y^\top(\tau)] \\ &= \mathbb{E}[\{A(t)x(t) + B(t)v(t)\}y^\top(\tau)] \\ &= A(t)\mathbb{E}[\underline{x(t)}y^\top(\tau)] + B(t)\mathbb{E}[\underline{v(t)}y^\top(\tau)] \\ &= \int_{t_0}^t A(t)H(t,\sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^\top(\tau)]d\sigma \quad =0 \text{ (後述)} \\ & \quad \text{WHK方程式を適用} \end{aligned}$$

# 駆動雑音と観測信号の相関

- $\mathbb{E}[v(t)y^T(\tau)]$

$$= \mathbb{E}[v(t)x^T(\tau)]C^T(\tau) + \mathbb{E}[v(t)w^T(\tau)]$$

- $\tau < t$  であるから

$$\mathbb{E}[v(t)x^T(\tau)] = 0$$

- 駆動雑音と観測雑音は独立だから

$$\mathbb{E}[v(t)w^T(\tau)] = 0$$

## 2. 微分方程式への変形: 右辺の微分

- 右辺を  $t$  で微分

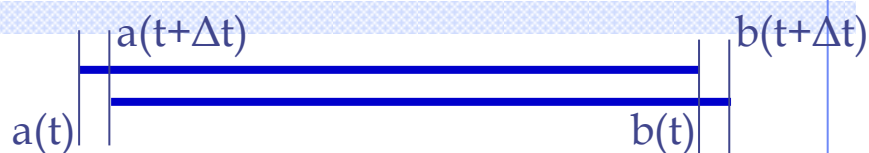
$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t H(t, \sigma) \mathbb{E}[y(\sigma) y^T(\tau)] d\sigma \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) \mathbb{E}[y(\sigma) y^T(\tau)] d\sigma + H(t, t) \mathbb{E}[y(t) y^T(\tau)] \end{aligned}$$

### Leibniz' Rule

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx = \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dx + f(t, b) \frac{db}{dt} - f(t, a) \frac{da}{dt}$$



# Leibniz' Ruleの略証



積分範囲を3つの区間に分解

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} f(t+\Delta t, x) dx - \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{a(t)}^{b(t)} \{f(t+\Delta t, x) - f(t, x)\} dx}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(t+\Delta t, x) dx - \int_{a(t)}^{a(t+\Delta t)} f(t+\Delta t, x) dx}{\Delta t} \\
 &= \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dx \\
 &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t+\Delta t, b(t+\Delta t)) - F(t+\Delta t, b(t))}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t+\Delta t, a(t+\Delta t)) - F(t+\Delta t, a(t))}{\Delta t} \\
 &= \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dx + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t+\Delta t, b(t+\Delta t)) - F(t+\Delta t, b(t))}{b(t+\Delta t) - b(t)} \frac{b(t+\Delta t) - b(t)}{\Delta t} \\
 &\quad - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t+\Delta t, a(t+\Delta t)) - F(t+\Delta t, a(t))}{a(t+\Delta t) - a(t)} \frac{a(t+\Delta t) - a(t)}{\Delta t} \\
 &= \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dx + f(t, b) \frac{db(t)}{dt} - f(t, a) \frac{da(t)}{dt}
 \end{aligned}$$

F(x): f(x)の不定積分

合成関数の微分

## 2. 微分方程式への変形: 右辺の微分(続)

$$y(t) = C(t)x(t) + w(t)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma + H(t, t) E[\underline{y(t)}y^T(\tau)] \\ = & \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma + H(t, t) C(t) \underline{E[x(t)y^T(\tau)]} \\ & + H(t, t) E[w(t)\{x^T(\tau)C^T(\tau) + w^T(\tau)\}] \end{aligned}$$

WHK方程式

$$\begin{aligned} = & \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma \\ & + \int_{t_0}^t H(t, t) C(t) H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[w(t)x^T(\tau)] &= 0 \quad (\tau < t) \\ E[w(t)w^T(\tau)] &= 0 \quad (\tau < t) \end{aligned}$$

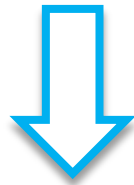
WHK方程式

$$E[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma$$

## 2. 微分方程式への変形: 導出

- 左辺の微分 = 右辺の微分より

$$\int_{t_0}^t A(t)H(t, \sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^\top(\tau)]d\sigma$$
$$= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^\top(\tau)]d\sigma + \int_{t_0}^t H(t, t)C(t)H(t, \sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^\top(\tau)]d\sigma$$



$$\int_{t_0}^t G(t, \sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^\top(\tau)]d\sigma = 0 \quad (t_0 \leq \sigma < t)$$

$$G(t, \sigma) = A(t)H(t, \sigma) - \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) - K(t)C(t)H(t, \sigma)$$

$$K(t) = H(t, t)$$

## 2. 微分方程式への変形: 導出

- 再びWHK方程式に着目

$$E[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma$$

$$\int_{t_0}^t G(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma = 0 \text{ より}$$

$$E[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^t \{H(t, \sigma) + G(t, \sigma)\} E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma$$

$H(t, \sigma) + G(t, \sigma)$  も、WHK方程式を満たす

## 2. 微分方程式への変形: 導出

- よって以下の2つはどちらも最適推定値

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma$$

$$\hat{x}'(t) = \int_{t_0}^t \{H(t, \sigma) + G(t, \sigma)\} y(\sigma) d\sigma$$

- これらの二乗誤差は0にならない

$$E[\{\hat{x}'(t) - \hat{x}(t)\}\{\hat{x}'(t) - \hat{x}(t)\}^T] = 0$$

## 2. 微分方程式への変形: 導出

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(\hat{x}'(t) - \hat{x}(t))(\hat{x}'(t) - \hat{x}(t))^{\top}] \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t G(t, \sigma) \mathbb{E}[y(\sigma)y^{\top}(\tau)] G^{\top}(t, \tau) d\sigma d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t G(t, \sigma) \underbrace{C(t) \mathbb{E}[x(\sigma)x^{\top}(\tau)] C^{\top}(t)}_{\text{半正定値}} G^{\top}(t, \tau) d\sigma d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^t G(t, \sigma) \underbrace{W}_{\text{正定値}} G^{\top}(t, \sigma) d\sigma \\ &= 0 \end{aligned}$$

よってこれが成り立つためには

$H(t, \sigma)$ の微分方程式

$$G(t, \sigma) = A(t)H(t, \sigma) - \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) - K(t)C(t)H(t, \sigma) = 0$$

### 3. $x$ の逐次推定式の導出

#### ■ $x$ の推定式

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma$$

#### ■ 両辺を $t$ で微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma + K(t) y(t) \end{aligned}$$

### 3. xの逐次推定式の導出(続)

$$\blacksquare \frac{d}{dt} \hat{x}(t) = \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma + K(t)y(t)$$

$$A(t)H(t, \sigma) - \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) - K(t)C(t)H(t, \sigma) = 0$$

の2式より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma + K(t)y(t) \\ &= \{A(t) - K(t)C(t)\} \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma + K(t)y(t) \\ &= \{A(t) - K(t)C(t)\} \hat{x}(t) + K(t)y(t) \end{aligned}$$



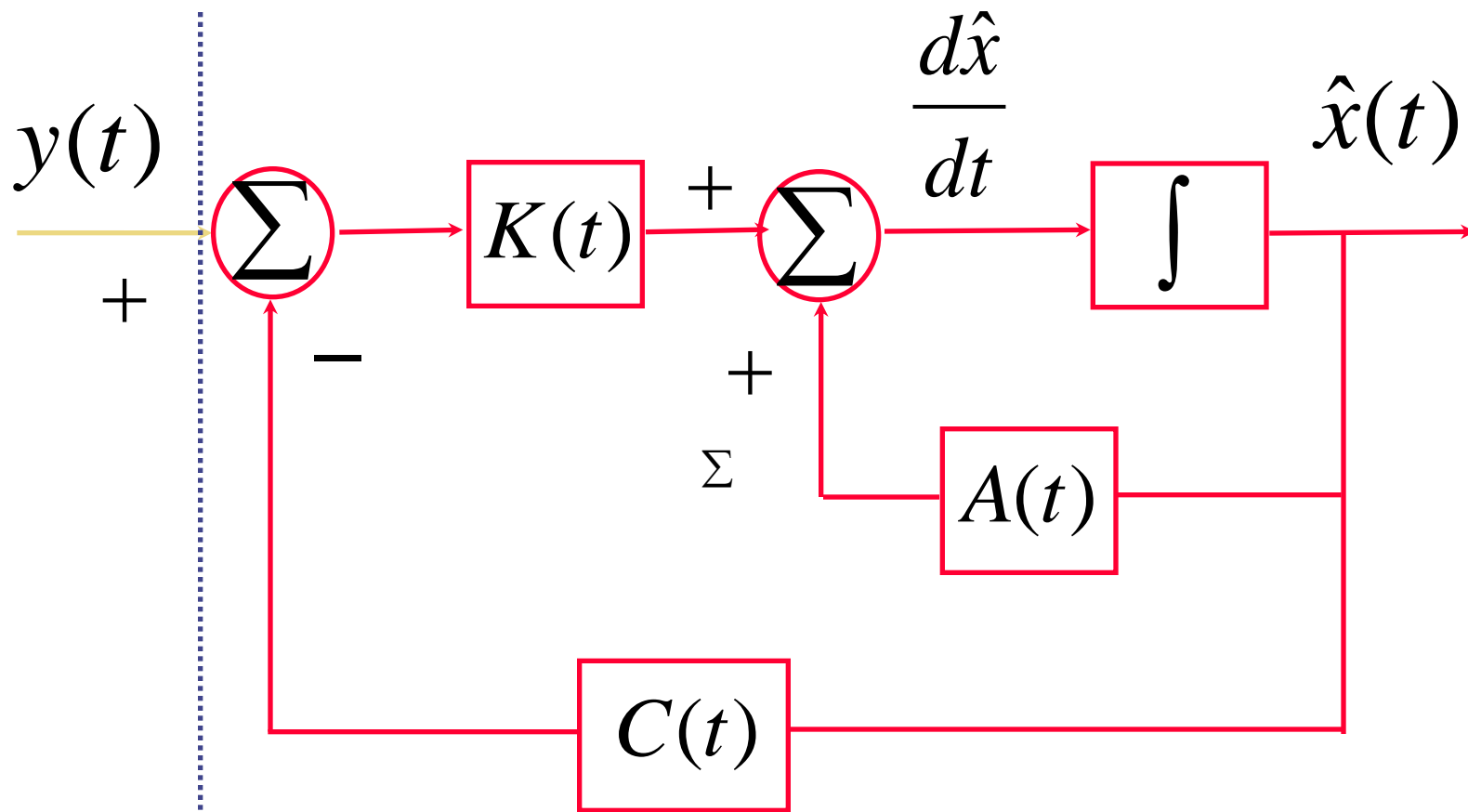
# Kalman-Bucyフィルタ

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= [A(t) - K(t)C(t)]\hat{x}(t) + K(t)y(t) \\ &= \hat{x}(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \\ &= \hat{x}(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

# 信号ブロック線図



測定系

フィルタ

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)]$$