

# 信号処理論第二 第12回 (12/25)

情報理工学系研究科システム情報学専攻  
猿渡 洋

[hiroshi\\_saruwatari@ipc.i.u-tokyo.ac.jp](mailto:hiroshi_saruwatari@ipc.i.u-tokyo.ac.jp)

## 信号処理論第二 講義予定(金曜2眼)

- 9/25: 第1回
- 10/02: 第2回
- 10/09: 第3回
- 10/16: 第4回
- 10/23: 第5回
- 10/30: 第6回
- 11/06: 第7回
- 11/27: 第8回
- 12/04: 第9回
- 12/11: 第10回
- 12/18: 第11回
- 12/25: 第12回
- 1/08: 第13回
- 01/22: 期末試験(予定)

※2020年度は全て90分講義とする(10時25分～11時55分)

# 講義内容

- $\delta$ 関数再考
- $\delta$ 関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

# 講義資料と成績評価

## ■ 講義資料

- システム1研HP <http://www.sp.ipc.i.u-tokyo.ac.jp/>からダウンロードできるようにしてあります

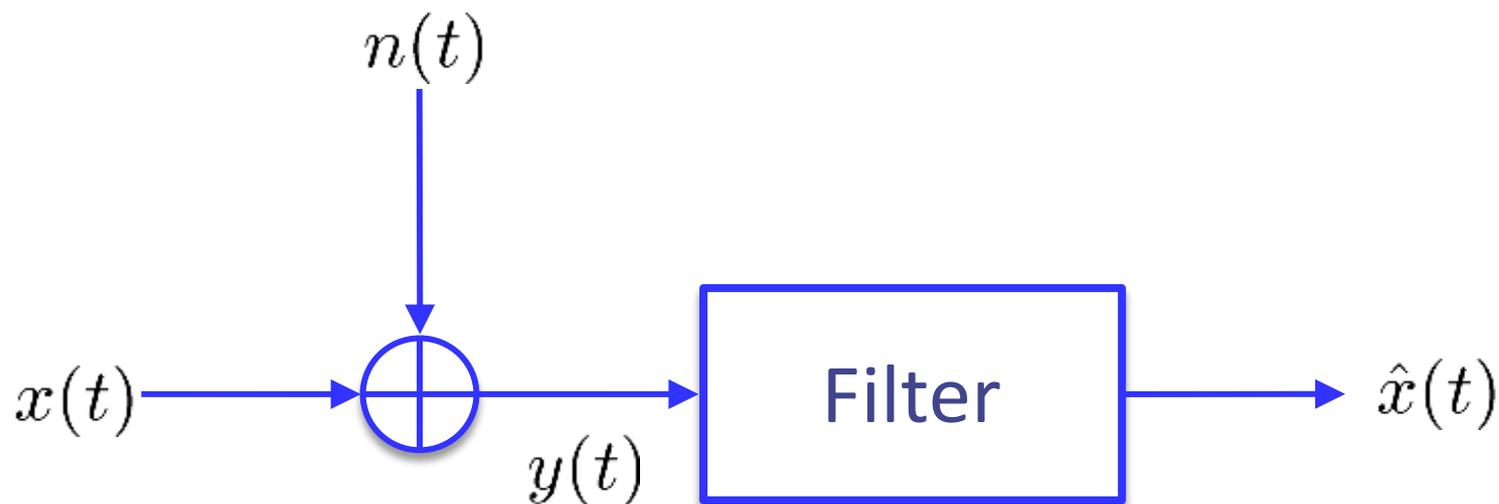
## ■ 成績評価

- 学期末試験

# 第9章 カルマンフィルタ

# 信号の推定問題

- 雑音が重畳する観測信号からどうやって信号成分を推定するか？



# Wiener Filter

- 観測信号 $y(t)$ から信号 $x(t)$ を推定する枠組み
- 線形時不変推定器:

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)y(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)y(t - \tau)d\tau$$

- 最小二乗規範:

$$J[h(t)] = \mathbb{E}[|\hat{x}(t) - x(t)|^2]$$

- $y(t)$ 、 $x(t)$ に対する定常性の仮定が必要

# 直交原理 (The Orthogonality Principle)

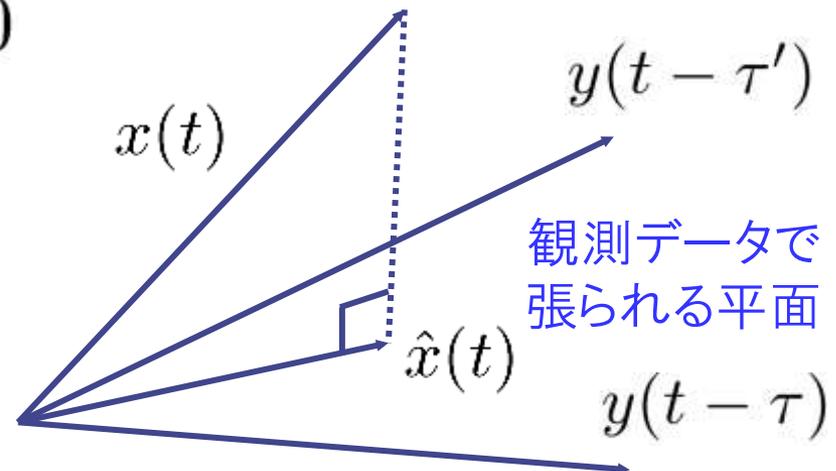
- 線形推定値  $\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)y(t - \alpha)d\alpha$  が平均二乗誤差を最小とするとき, 以下の直交原理が成り立つ

- **直交原理 I** : 誤差は観測値と直交する

$$\mathbb{E}[\{x(t) - \hat{x}(t)\}y(t - \tau)] = 0$$

- **直交原理 II** : 誤差は最適推定値と直交する

$$\mathbb{E}[\{x(t) - \hat{x}(t)\}\hat{x}(t)] = 0$$



# Kalman Filter

- 観測信号  $y(\tau)$  ( $t_0 \leq \tau < t$ ) から状態  $x(t)$  を推定する枠組み

- 線形時変推定器:

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma$$

- 最小二乗規範:

$$J[h(t, \tau)] = \mathbb{E}[|\hat{x}(t) - x(t)|^2]$$

- 実際には、上記の時変インパルス応答を畳み込むことはなく、逐次的な推定が可能

# Kalman Filterの問題設定

■ 状態方程式:  $\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t)$

駆動雑音

観測方程式:  $y(t) = C(t)x(t) + w(t)$

観測雑音

## ■ 仮定

- $v(t)$ 、 $w(t)$ は互いに独立な正規白色雑音

$$E[v(t)] = 0 \quad E[v(t)v^T(\tau)] = V\delta(t - \tau)$$

$$E[w(t)] = 0 \quad E[w(t)w^T(\tau)] = W\delta(t - \tau)$$

$$E[v(t)w^T(\tau)] = 0$$

- システムパラメータ:  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ と、雑音共分散  $W$ ,  $V$ は既知
- $W$ は逆行列をもつ

# Kalman Filterの導出

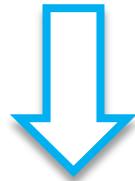
- 1) Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式の導出
- 2) 微分方程式への変形
- 3)  $x$ の逐次推定式の導出
- 4) Kalman ゲインの決定
- 5) 誤差共分散の更新式

# 1. Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式の導出

■  $\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \sigma)y(\sigma)d\sigma$  より

$$\mathbb{E} \left[ \left\{ x(t) - \int_{t_0}^t H(t, \sigma)y(\sigma)d\sigma \right\} y^T(\tau) \right] = 0 \quad \text{直交原理}$$

$(t_0 \leq \sigma < t)$



$$\mathbb{E}[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^t H(t, \sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^T(\tau)]d\sigma$$

$(t_0 \leq \sigma < t)$

Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式

## 2. 微分方程式への変形:方針

### ■ Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式

$$\mathbb{E}[x(t)y^{\top}(\tau)] = \int_{t_0}^t H(t, \sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^{\top}(\tau)]d\sigma$$

### ■ 両辺をtで微分し, システムのモデル(状態方程式):

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t)$$

を適用して変形することを考える

## 2. 微分方程式への変形: 左辺の微分

- 左辺を  $t$  で微分

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}[x(t)y^\top(\tau)] \\ &= \mathbb{E}[\{A(t)x(t) + B(t)v(t)\}y^\top(\tau)] \\ &= A(t)\mathbb{E}[\underline{x(t)}y^\top(\tau)] + B(t)\mathbb{E}[\underline{v(t)}y^\top(\tau)] \\ &= \int_{t_0}^t A(t)H(t,\sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^\top(\tau)]d\sigma \quad =0 \\ & \quad \text{WHK方程式を適用} \end{aligned}$$

## 2. 微分方程式への変形: 右辺の微分

- 右辺を  $t$  で微分

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t H(t, \sigma) \mathbb{E}[y(\sigma) y^\top(\tau)] d\sigma \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) \mathbb{E}[y(\sigma) y^\top(\tau)] d\sigma + H(t, t) \mathbb{E}[y(t) y^\top(\tau)] \end{aligned}$$

### Leibniz' Rule

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx = \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dx + f(t, b) \frac{db}{dt} - f(t, a) \frac{da}{dt}$$

## 2. 微分方程式への変形: 右辺の微分(続)

$$y(t) = C(t)x(t) + w(t)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma + H(t, t) E[\underline{y(t)}y^T(\tau)] \\ = & \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma + H(t, t) C(t) \underline{E[x(t)y^T(\tau)]} \\ & + H(t, t) E[w(t)\{x^T(\tau)C^T(\tau) + w^T(\tau)\}] \end{aligned}$$

WHK方程式

$$\begin{aligned} = & \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma \\ & + \int_{t_0}^t H(t, t) C(t) H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[w(t)x^T(\tau)] &= 0 \quad (\tau < t) \\ E[w(t)w^T(\tau)] &= 0 \quad (\tau < t) \end{aligned}$$

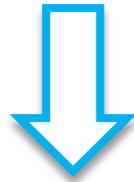
WHK方程式

$$E[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma$$

## 2. 微分方程式への変形: 導出

- 左辺の微分 = 右辺の微分より

$$\int_{t_0}^t A(t)H(t, \sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^\top(\tau)]d\sigma$$
$$= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^\top(\tau)]d\sigma + \int_{t_0}^t H(t, t)C(t)H(t, \sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^\top(\tau)]d\sigma$$



$$\int_{t_0}^t G(t, \sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^\top(\tau)]d\sigma = 0 \quad (t_0 \leq \sigma < t)$$

$$G(t, \sigma) = A(t)H(t, \sigma) - \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) - K(t)C(t)H(t, \sigma)$$

$$K(t) = H(t, t)$$

## 2. 微分方程式への変形：導出

- 再びWHK方程式に着目

$$E[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma$$

$$\int_{t_0}^t G(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma = 0 \text{ より}$$

$$E[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^t \{H(t, \sigma) + G(t, \sigma)\} E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma$$

$H(t, \sigma) + G(t, \sigma)$  も、WHK方程式を満たす

## 2. 微分方程式への変形: 導出

- よって以下の2つはどちらも最適推定値

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma$$

$$\hat{x}'(t) = \int_{t_0}^t \{H(t, \sigma) + G(t, \sigma)\} y(\sigma) d\sigma$$

- これらの二乗誤差は0にならない

$$E[\{\hat{x}'(t) - \hat{x}(t)\}\{\hat{x}'(t) - \hat{x}(t)\}^T] = 0$$

## 2. 微分方程式への変形: 導出

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(\hat{x}'(t) - \hat{x}(t))(\hat{x}'(t) - \hat{x}(t))^{\top}] \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t G(t, \sigma) \mathbb{E}[y(\sigma)y^{\top}(\tau)] G^{\top}(t, \tau) d\sigma d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t G(t, \sigma) \underbrace{C(t) \mathbb{E}[x(\sigma)x^{\top}(\tau)] C^{\top}(t)}_{\text{半正定値}} G^{\top}(t, \tau) d\sigma d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^t G(t, \sigma) \underbrace{W}_{\text{正定値}} G^{\top}(t, \sigma) d\sigma \\ &= 0 \end{aligned}$$

よってこれが成り立つためには

$H(t, \sigma)$ の微分方程式

$$G(t, \sigma) = A(t)H(t, \sigma) - \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) - K(t)C(t)H(t, \sigma) = 0$$

### 3. $x$ の逐次推定式の導出

#### ■ $x$ の推定式

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma$$

#### ■ 両辺を $t$ で微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma + K(t) y(t) \end{aligned}$$

### 3. $x$ の逐次推定式の導出(続)

$$\blacksquare \frac{d}{dt} \hat{x}(t) = \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma + K(t) y(t)$$

$$A(t)H(t, \sigma) - \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) - K(t)C(t)H(t, \sigma) = 0$$

の2式より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma + K(t) y(t) \\ &= \{A(t) - K(t)C(t)\} \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma + K(t) y(t) \\ &= \{A(t) - K(t)C(t)\} \hat{x}(t) + K(t) y(t) \end{aligned}$$

# Kalman-Bucy Filter

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= [A(t) - K(t)C(t)]\hat{x}(t) + K(t)y(t) \\ &= \hat{x}(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \\ &= \hat{x}(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

## 4) Kalmanゲインの決定

$K(t) = H(t, t)$  を決定したい

方針: 観測方程式  $y(\tau) = Cx(\tau) + w(\tau)$   
に基づき、WHK方程式を変形

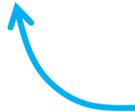
$$E[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma$$

$(t_0 \leq \tau < t)$

Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式

## 4) Kalmanゲインの決定: WHK方程式の変形

$$\begin{aligned} & \underline{E[x(t)y^T(\tau)]} - \int_{t_0}^t H(t, \sigma) \underline{E[y(\sigma)y^T(\tau)]} d\sigma \\ = & \underline{E[x(t)x^T(\tau)]} C^T(\tau) - \int_{t_0}^t H(t, \sigma) \underline{E[y(\sigma)x^T(\tau)]} C^T(\tau) d\sigma \\ & - \int_{t_0}^t H(t, \sigma) \underline{W} \delta(\sigma - \tau) d\sigma \\ = & E[\{x(t) - \hat{x}(t)\} x^T(\tau)] C^T(\tau) - H(t, \tau) W = 0 \end{aligned}$$


$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma$$

## 4) Kalmanゲインの決定：誤差共分散による表現

$$E[\{x(t) - \hat{x}(t)\}x^T(\tau)]C^T(\tau) - H(t, \tau)W = 0$$

$\tau \rightarrow t$  とすると

$$K(t)W = \underline{E[\{x(t) - \hat{x}(t)\}x^T(t)]C^T(t)}$$

$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  の共分散を  $P(t) = E[e(t)e^T(t)]$  とすれば、  
 $E[\{x(t) - \hat{x}(t)\}\hat{x}^T(t)] = 0$  (直交原理) より

$$\begin{aligned} & \underline{E[\{x(t) - \hat{x}(t)\}x^T(t)]} \\ = & E[\{x(t) - \hat{x}(t)\}\{x^T(t) - \hat{x}^T(t)\}] = \underline{P(t)} \end{aligned}$$

$$K(t) = P(t)C^T(t)W^{-1}$$

## 5) 誤差共分散の更新式:方針

- 誤差 $e(t)$ の微分方程式を導出
- 誤差共分散行列 $P(t)$ の微分方程式を導出
- これを解いて更新式を導出

## 5) 誤差共分散の更新式: 推定誤差の微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\hat{x}(t) + K(t)y(t)$$

$$\frac{d}{dt}e(t) = [A(t) - K(t)C(t)]e(t) + K(t)C(t)x(t)$$

$$+ B(t)v(t) - K(t)\{C(t)x(t) + w(t)\}$$

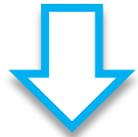
$$= [A(t) - K(t)C(t)]e(t) + B(t)v(t) - K(t)w(t)$$

$e(t)$ の微分方程式

## (参考) 行列微分方程式の解

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t)$$

初期条件  $x(t_0)$ , 入力  $v(t)(t \geq t_0)$



$$\text{解: } x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \underbrace{\Phi(t, \tau)B(\tau)}_{\text{遷移行列}}v(\tau)d\tau$$

遷移行列は下記の微分方程式の基本解

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, \tau) &= A(t)\Phi(t, \tau) \\ \Phi(\tau, \tau) &= I\end{aligned}$$

## 5) 誤差共分散の更新式: 推定誤差の導出

- $$\frac{d}{dt}e(t) = [A(t) - K(t)C(t)]e(t) + B(t)u(t) - K(t)w(t)$$

$\frac{d}{dt}\Phi_e(t, \tau) = [A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t, \tau)$  の解を  
遷移行列  $\Phi_e(t, \tau)$  とすると

$$e(t) = \Phi_e(t, t_0)e(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_e(t, \tau)[B(\tau)u(\tau) - K(\tau)w(\tau)]d\tau$$

## 5) 誤差共分散の更新式: 誤差共分散の微分方程式

- $e(t_0)$  と  $v(t)$ ,  $w(t)$  は無相関と仮定

$$\begin{aligned} P(t) &= \mathbb{E}[e(t)e(t)^\top] \\ &= \Phi_e(t, t_0)P(t_0)\Phi_e^\top(t, t_0) \\ &\quad + \mathbb{E}\left[ \int_{t_0}^t \Phi_e(t, \tau)\{B(\tau)v(\tau) - K(\tau)w(\tau)\}d\tau \right. \\ &\quad \left. \int_{t_0}^t \{v^\top(\sigma)B^\top(\sigma) - w^\top(\sigma)K^\top(\sigma)\}\Phi_e^\top(t, \sigma)d\sigma \right] \end{aligned}$$

- $v(t)$  と  $w(t)$  は互いに無相関なので

$$\begin{aligned} P(t) &= \Phi_e(t, t_0)P(t_0)\Phi_e^\top(t, t_0) \\ &\quad + \int_{t_0}^t \Phi_e(t, \tau) \left[ B(\tau)VB^\top(\tau) + K(\tau)WK^\top(\tau) \right] \Phi_e^\top(t, \tau)d\tau \end{aligned}$$

## 5) 誤差共分散の更新式: 誤差共分散の微分方程式

### ■ 両辺をtで微分

$$\frac{d}{dt}P(t) = \frac{d}{dt}\Phi_e(t, t_0)P(t_0)\Phi_e^\top(t, t_0)$$

$$+ \Phi_e(t, t_0)P(t_0)\frac{d}{dt}\Phi_e^\top(t, t_0)$$

$$+ \int_{t_0}^t \frac{d}{dt}\Phi_e(t, \tau)D(\tau)\Phi_e^\top(t, \tau)d\tau$$

$$+ \int_{t_0}^t \Phi_e(t, \tau)D(\tau)\frac{d}{dt}\Phi_e^\top(t, \tau)d\tau$$

$$+ \Phi_e(t, t)D(t)\Phi_e^\top(t, t)$$

Leibniz' Rule  
の適用

$$D(\tau) = B(\tau)VB^\top(\tau) + K(\tau)WK^\top(\tau)$$

## 5) 誤差共分散の更新式: 誤差共分散の微分方程式

- $\frac{d}{dt}\Phi_e(t, \tau) = [A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t, \tau)$  を代入

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P(t) &= [A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t, t_0)P(t_0)\Phi_e^\top(t, t_0) \\ &\quad + \Phi_e(t, t_0)P(t_0)\Phi_e^\top(t, t_0)[A(t) - K(t)C(t)]^\top \\ &\quad + \int_{t_0}^t [A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t, \tau)D(\tau)\Phi_e^\top(t, \tau)d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^t \Phi_e(t, \tau)D(\tau)\Phi_e^\top(t, \tau)[A(t) - K(t)C(t)]^\top d\tau \\ &\quad + D(t)\end{aligned}$$

$$D(\tau) = B(\tau)VB^\top(\tau) + K(\tau)WK^\top(\tau)$$

## 5) 誤差共分散の更新式: 誤差共分散の微分方程式

$$P(t) = \Phi_e(t, t_0)P(t_0)\Phi_e^\top(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_e(t, \tau)D(\tau)\Phi_e^\top(t, \tau)d\tau$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P(t) &= \underline{[A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t, t_0)P(t_0)\Phi_e^\top(t, t_0)} \\ &\quad + \underline{\Phi_e(t, t_0)P(t_0)\Phi_e^\top(t, t_0)[A(t) - K(t)C(t)]^\top} \\ &\quad + \underline{\int_{t_0}^t [A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t, \tau)D(\tau)\Phi_e^\top(t, \tau)d\tau} \\ &\quad + \underline{\int_{t_0}^t \Phi_e(t, \tau)D(\tau)\Phi_e^\top(t, \tau)[A(t) - K(t)C(t)]^\top d\tau} \\ &\quad + D(t) \\ &= \underline{[A(t) - K(t)C(t)]P(t)} + \underline{P(t)[A(t) - K(t)C(t)]^\top} + D(t)\end{aligned}$$

## 5) 誤差共分散の更新式: 誤差共分散の微分方程式

- 先に求めたKalmanゲインを代入

$$K(t) = P(t)C^T(t)W^{-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P(t) = & A(t)P(t) - P(t)C^T(t)W^{-1}C(t)P(t) \\ & + P(t)A^T(t) + B(t)VB(t)^T \end{aligned}$$

この微分方程式を  
Riccati方程式という

# Kalmanゲインと誤差共分散

Kalmanゲイン

$$K(t) = P(t)C^T(t)W^{-1}$$

Riccati方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P(t) = & A(t)P(t) - P(t)C^T(t)W^{-1}C(t)P(t) \\ & + P(t)A^T(t) + B(t)VB(t)^T \end{aligned}$$

$$P(t_0) = X_0$$