信号処理論第二
第13回 (1/08)

情報理工学系研究科システム情報学専攻
猿渡 洋
hiroshi_saruwatari@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

信号処理論第二　講義予定（金曜2眼）

- 9/25: 第1回
- 10/02: 第2回
- 10/09: 第3回
- 10/16: 第4回
- 10/23: 第5回
- 10/30: 第6回
- 11/06: 第7回
- 11/27: 第8回
- 12/04: 第9回
- 12/11: 第10回
- 12/18: 第11回
- 12/25: 第12回
- 1/08: 第13回
- 01/22: 期末試験（予定）

※2020年度は全て90分講義とする（10時25分～11時55分）

講義内容

- δ関数再考
- δ関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

講義資料と成績評価

- 講義資料
  - システム1研HP　http://www.sp.ipc.i.u-tokyo.ac.jp/ からダウンロードできるようにしてあります
- 成績評価
  - 学期末試験

離散時間Kalmanフィルタ

離散時間Kalmanフィルタの問題設定

システムモデル: $x_k = \Phi_{k,k-1} x_{k-1} + \underbrace{B_k v_k}_{\text{駆動雑音}}$

測定モデル: $y_k = C_k x_k + \underbrace{w_k}_{\text{観測雑音}}$

k : 時刻インデックス

- 仮定
  - v_k, w_k は互いに独立な正規白色雑音

$$\mathbb{E}[v_k] = 0 \qquad \mathbb{E}[v_k v_n^\mathsf{T}] = V_k \delta_{kn}$$

$$\mathbb{E}[w_k] = 0 \qquad \mathbb{E}[w_k w_n^\mathsf{T}] = W_k \delta_{kn}$$

$$\mathbb{E}[v_k w_n^\mathsf{T}] = 0$$

  - パラメータ: $\Phi_{k,k-1}, B_k, C_k$ と、雑音共分散 V_k, W_k は既知

離散時間Kalmanフィルタの構成

状態推定値

$$\hat{x}_{k-1|k-1} \xrightarrow{\text{時間更新}} \hat{x}_{k|k-1} \xrightarrow{\text{計測更新}} \hat{x}_{k|k}$$

$\hat{x}_{k-1|k-1}$：時刻k-1までの観測値を用いた時刻k-1の状態推定値

$\hat{x}_{k|k-1}$：時刻k-1までの観測値を用いた時刻kの状態推定値

$\hat{x}_{k|k}$：時刻kまでの観測値を用いた時刻kの状態推定値

観測値 y_k → 計測更新

離散時間Kalmanフィルタの目的と導出方針

- 目的
  - $\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}$ と y_k から $\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}$ を逐次的に計算したい
  - ただし $P_{n|m} = \mathrm{cov}(x_n - \hat{x}_{n|m})$

<u>逐次更新アルゴリズム</u>

$$
\begin{tikzcd}
 & & y_k \arrow[d] \\
\hat{x}_{k-1|k-1} \arrow[r] & \hat{x}_{k|k-1} \arrow[r, "\textcircled{2}"] & \hat{x}_{k|k} \\
P_{k-1|k-1} \arrow[r, "\textcircled{1}"] & P_{k|k-1} \arrow[r, "\textcircled{3}"'] \arrow[ur] & P_{k|k}
\end{tikzcd}
$$

①状態の時間更新

- $\hat{x}_{k-1|k-1} \longrightarrow \hat{x}_{k|k-1}$

$$\boxed{\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1}\hat{x}_{k-1|k-1}}$$

システムモデル $x_k = \Phi_{k,k-1}x_{k-1} + B_k v_k$

の条件つき期待値 $\mathbb{E}[\cdot|y_{1:k-1}]$ をとると

$\mathbb{E}[x_k|y_{1:k-1}] = \Phi_{k,k-1}\mathbb{E}[x_{k-1}|y_{1:k-1}] + 0$

①状態の時間更新

- $\hat{x}_{k-1|k-1} \longrightarrow \hat{x}_{k|k-1}$

$$\boxed{\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1}\hat{x}_{k-1|k-1}}$$

- $P_{k-1|k-1} \longrightarrow P_{k|k-1}$

$$\begin{aligned} P_{k|k-1} &= \mathrm{cov}(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) \\ &= \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})^\top] \\ &= \Phi_{k,k-1}P_{k-1|k-1}\Phi_{k,k-1}^\top + \underline{B_k V_k B_k^\top} \end{aligned}$$

時間更新による分散の増分

$P_{k|k-1}$ の導出

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})^\mathsf{T}] \\
&= \mathbb{E}[(\Phi_{k,k-1}x_{k-1} + B_k v_v - \Phi_{k,k-1}\hat{x}_{k-1|k-1})(\Phi_{k,k-1}x_{k-1} + B_k v_v - \Phi_{k,k-1}\hat{x}_{k-1|k-1})^\mathsf{T}] \\
&= \mathbb{E}[(\Phi_{k,k-1}(\underline{x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}}) + B_k v_v)(\Phi_{k,k-1}(\underline{x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}}) + B_k v_v)^\mathsf{T}] \\
&= \Phi_{k,k-1}P_{k-1|k-1}\Phi_{k,k-1}^\mathsf{T} + B_k V_k B_k^\mathsf{T}
\end{aligned}
$$

時刻*k*-1 における推定誤差

離散時間Kalmanフィルタの目的と導出方針

- 目的
  - $\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}$ と y_k から $\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}$ を逐次的に計算したい
  - ただし $P_{n|m} = \mathrm{cov}(x_n - \hat{x}_{n|m})$

<u>逐次更新アルゴリズム</u>

$$
\begin{tikzcd}
 & & y_k \arrow[d] \\
\hat{x}_{k-1|k-1} \arrow[r] & \hat{x}_{k|k-1} \arrow[r, "②"] & \hat{x}_{k|k} \\
P_{k-1|k-1} \arrow[r, "①"] & P_{k|k-1} \arrow[r, "③"'] \arrow[ur] & P_{k|k}
\end{tikzcd}
$$

②状態の計測更新

- $\hat{x}_{k|k-1}, \ y_k \longrightarrow \hat{x}_{k|k}$
  - イノベーション（観測値に対する予測の誤差）

$$\mu_k = y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}$$

  - 更新式

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \underline{K_k} \mu_k$$

Kalmanゲイン（未知）

（参考）（θ ,y)がガウス分布に従うとき

$$\theta_{\mathrm{MMSE}} = \mathbb{E}[\theta|y] = \bar{\theta} + A_0(y - \bar{y})$$

補足

$\theta \Rightarrow x_k$， $y \Rightarrow y_k$， $\mathbb{E}[\cdot] \Rightarrow \mathbb{E}[\cdot|y_{1,\ldots,k-1}]$ とすれば

$\mathbb{E}[\theta|y] \Rightarrow \mathbb{E}[x_k|y_k, y_{1,\ldots,k-1}]$ がまさに求めたいもの

$\mathbb{E}[x_k|y_{1,\ldots,k-1}] = \hat{x}_{k|k-1}$

$$\theta_{\mathrm{MMSE}} = \mathbb{E}[\theta|y] = \bar{\theta} + A_0(y - \bar{y})$$

測定モデル $y_k = C_k x_k + w_k$ の
条件付き期待値 $\mathbb{E}[\cdot|y_{1,\ldots,k-1}]$ をとると
$\mathbb{E}[y_k|y_{1,\ldots,k-1}] = C_k \hat{x}_{k|k-1}$

$\boldsymbol{A}_0$ は θ と y の相互共分散行列。
つまり、カルマンゲインは
y_k と x_k の相互共分散行列 $\mathbb{E}[y_k x_k^{\mathsf{T}}|y_{1,\ldots,k-1}]$
に相当していることが分かる。

②最適Kalmanゲインの導出

- Kalmanゲインを決定する最適化問題

$$\mathbb{E}[\|x_k - \hat{x}_{k|k}\|_2^2] \to \text{minimize}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|x_k - \hat{x}_{k|k}\|_2^2] &= \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k})^\mathsf{T}(x_k - \hat{x}_{k|k})] \\ &= \mathrm{tr}\left(\mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^\mathsf{T}]\right) \\ &= \mathrm{tr}(\underline{P_{k|k}})\end{aligned}$$

Kalmanゲインを
導出するのに必要

離散時間Kalmanフィルタの目的と導出方針

- 目的
  - $\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}$ と y_k から $\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}$ を逐次的に計算したい
  - ただし $P_{n|m} = \mathrm{cov}(x_n - \hat{x}_{n|m})$

<u>逐次更新アルゴリズム</u>

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
 & & y_k \arrow[d] \\
\hat{x}_{k-1|k-1} \arrow[r] & \hat{x}_{k|k-1} \arrow[r, "②"] & \hat{x}_{k|k} \\
P_{k-1|k-1} \arrow[r, "①"] & P_{k|k-1} \arrow[ur] \arrow[r, "③"'] & P_{k|k}
\end{tikzcd}
$$

③状態推定値の誤差共分散の更新

- $P_{k|k-1} \longrightarrow P_{k|k}$

$$
\begin{aligned}
&P_{k|k} \\
&= \mathrm{cov}\left(x_k - \hat{x}_{k|k}\right) \\
&= \mathrm{cov}\left(x_k - (\hat{x}_{k|k-1} + K_k \underline{\mu_k})\right) \\
&= \mathrm{cov}\left(x_k - (\hat{x}_{k|k-1} + K_k(\underline{y_k} - C_k \hat{x}_{k|k-1}))\right) \\
&= \mathrm{cov}\left(\underline{x_k} - (\underline{\hat{x}_{k|k-1}} + K_k(C_k \underline{x_k} + w_k - C_k \underline{\hat{x}_{k|k-1}}))\right) \\
&= \mathrm{cov}\left((I - K_k C_k)(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) - K_k w_k\right) \\
&= \mathrm{cov}\left((I - K_k C_k)(x_k - \hat{x}_{k|k-1})\right) + \mathrm{cov}\left(K_k w_k\right) \\
&= (I - K_k C_k)\mathrm{cov}\left(x_k - \hat{x}_{k|k-1}\right)(I - K_k C_k)^{\mathsf{T}} + K_k \mathrm{cov}\left(w_k\right) K_k^{\mathsf{T}} \\
&= (I - K_k C_k) P_{k|k-1} (I - K_k C_k)^{\mathsf{T}} + K_k W_k K_k^{\mathsf{T}}
\end{aligned}
$$

$\because$ w は$x, \hat{x}$ と独立

②最適Kalmanゲインの導出

- Kalmanゲインを決定する最適化問題

$$\mathbb{E}[\|x_k - \hat{x}_{k|k}\|_2^2] \to \mathrm{minimize}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|x_k - \hat{x}_{k|k}\|_2^2] &= \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k})^\top (x_k - \hat{x}_{k|k})] \\ &= \mathrm{tr}\big(\mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^\top]\big) \\ &= \mathrm{tr}(\underline{P_{k|k}})\end{aligned}$$

$$= \mathrm{tr}\big((I - K_k C_k) P_{k|k-1} (I - K_k C_k)^\top + K_k W_k K_k^\top\big)$$

②最適Kalmanゲインの導出

■最適化規準

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(P_{k|k}) &= \mathrm{tr}\big((I - K_k C_k) P_{k|k-1} (I - K_k C_k)^{\mathsf{T}} + K_k W_k K_k^{\mathsf{T}}\big) \\ &= \mathrm{tr}\big(P_{k|k-1} - \underline{K_k} C_k P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C_k^{\mathsf{T}} \underline{K_k^{\mathsf{T}}} \\ &\qquad + \underline{K_k} C_k P_{k|k-1} C_k^{\mathsf{T}} \underline{K_k^{\mathsf{T}}} + \underline{K_k} W_k \underline{K_k^{\mathsf{T}}}\big)\end{aligned}$$

- $\mathrm{tr}(P_{k|k})$ を最小化する K_k は $\dfrac{\partial \mathrm{tr}(P_{k|k})}{\partial K_k} = 0$ を満たす

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{tr}(P_{k|k})}{\partial K_k} &= -2 P_{k|k-1} C_k^{\mathsf{T}} + 2 K_k (C_k P_{k|k-1} C_k^{\mathsf{T}} + W_k) \\ &= 0\end{aligned}$$

∵トレースの微分公式より

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{tr}(MK^{\mathrm{T}})}{\partial K} = M, \qquad \frac{\partial \mathrm{tr}(KMK^{\mathrm{T}})}{\partial K} = KM^{\mathrm{T}} + KM}$$

$$\therefore\ \hat{K}_k = P_{k|k-1} C_k^{\mathsf{T}} (C_k P_{k|k-1} C_k^{\mathsf{T}} + W_k)^{-1}$$

③最適Kalmanゲインにおける推定誤差共分散

- $P_{k|k}$ に $\hat{K}_k$ を代入

$$P_{k|k} = (I - K_k C_k) P_{k|k-1} (I - K_k C_k)^\mathsf{T} + K_k W_k K_k^\mathsf{T}$$

$$\hat{K}_k = P_{k|k-1} C_k^\mathsf{T} (C_k P_{k|k-1} C_k^\mathsf{T} + W_k)^{-1}$$

（最適Kalmanゲイン）

$$\hat{K}_k (C_k P_{k|k-1} C_k^\mathsf{T} + W_k) \hat{K}_k^\mathsf{T} = P_{k|k-1} C_k^\mathsf{T} \hat{K}_k^\mathsf{T}$$

$$P_{k|k} = (I - \hat{K}_k C_k) P_{k|k-1}$$

導出

$$P_{k|k} = (I - K_k C_k) P_{k|k-1} (I - K_k C_k)^\mathsf{T} + K_k W_k K_k^\mathsf{T}$$

展開

$$\begin{aligned} P_{k|k} &= (I - \hat{K}_k C_k) P_{k|k-1} - (I - \hat{K}_k C_k) P_{k|k-1} C_k^\mathsf{T} \hat{K}_k^\mathsf{T} + \hat{K}_k W_k \hat{K}_k^\mathsf{T} \\ &= (I - \hat{K}_k C_k) P_{k|k-1} - \cancel{P_{k|k-1} C_k^\mathsf{T} \hat{K}_k^\mathsf{T}} + \underline{\hat{K}_k C_k P_{k|k-1} C_k^\mathsf{T} \hat{K}_k^\mathsf{T} + \hat{K}_k W_k \hat{K}_k^\mathsf{T}} \end{aligned}$$

$$\cancel{P_{k|k-1} C_k^\mathsf{T} \hat{K}_k^\mathsf{T}}$$

$$\hat{K}_k (C_k P_{k|k-1} C_k^\mathsf{T} + W_k) \hat{K}_k^\mathsf{T} = P_{k|k-1} C_k^\mathsf{T} \hat{K}_k^\mathsf{T}$$

最適カルマンゲインの条件式

離散時間Kalmanフィルタのまとめ

$$
\begin{tikzcd}
 & & y_k \arrow[d] \\
\hat{x}_{k-1|k-1} \arrow[r] & \hat{x}_{k|k-1} \arrow[r, "②"] & \hat{x}_{k|k} \\
 & ① & \\
P_{k-1|k-1} \arrow[r] & P_{k|k-1} \arrow[uur] \arrow[r, "③"'] & P_{k|k}
\end{tikzcd}
$$

① $$\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1}\hat{x}_{k-1|k-1}$$
$$P_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1}P_{k-1|k-1}\Phi_{k,k-1}^{\mathsf{T}} + B_k V_k B_k^{\mathsf{T}}$$

② $$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1}C_k^{\mathsf{T}}(C_k P_{k|k-1} C_k^{\mathsf{T}} + W_k)^{-1} (y_k - C_k\hat{x}_{k|k-1})$$

③ $$P_{k|k} = (I - P_{k|k-1}C_k^{\mathsf{T}}(C_k P_{k|k-1} C_k^{\mathsf{T}} + W_k)^{-1}C_k)P_{k|k-1}$$

離散時間KalmanフィルタのBayes的解釈

$$\boxed{p(x_{k-1}|y_{1:k-1})} = \mathcal{N}(\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1})$$

システムモデルより:

$$\underline{p(x_k|x_{k-1})} = \mathcal{N}(\Phi_{k,k-1}x_{k-1}, B_k V_k B_k^{\mathsf{T}})$$

計測モデルより:

$$\underline{p(y_k|x_k)} = \mathcal{N}(C_k x_k, W_k)$$

時間更新 $$\underline{p(x_k|y_{1:k-1})} = \int \underline{p(x_k|x_{k-1})}\boxed{p(x_{k-1}|y_{1:k-1})}\mathrm{d}x_{k-1}$$

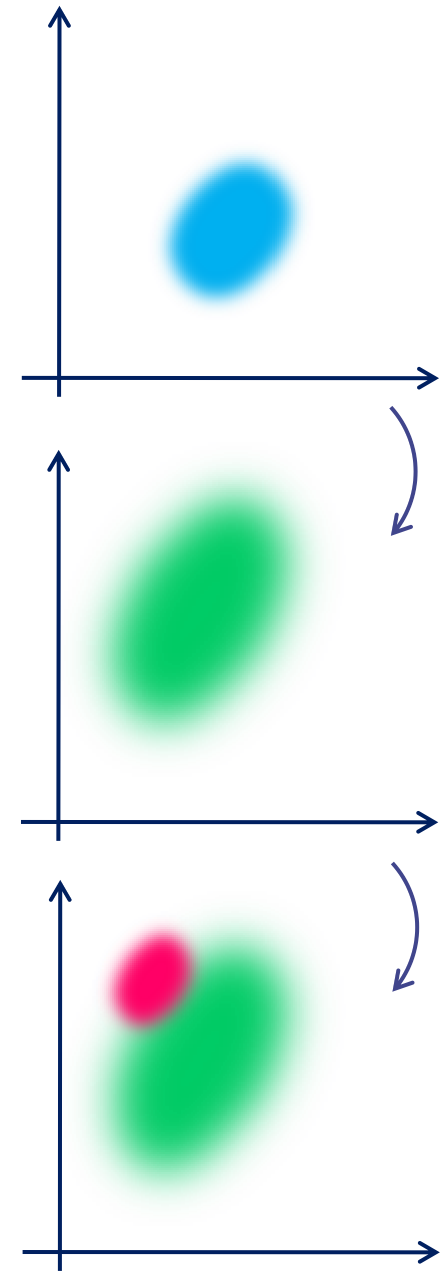
計測更新 $$\boxed{p(x_k|y_{1:k})} = \frac{\underline{p(y_k|x_k)}\,\underline{p(x_k|y_{1:k-1})}}{p(y_k|y_{1:k-1})} = \frac{\underline{p(y_k|x_k)}\,\underline{p(x_k|y_{1:k-1})}}{\int \underline{p(y_k|x_k)}\,\underline{p(x_k|y_{1:k-1})}\mathrm{d}x_k}$$

$$\boxed{p(x_k|y_{1:k})} = \mathcal{N}(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$$

逐次更新アルゴリズムで計算される確率分布

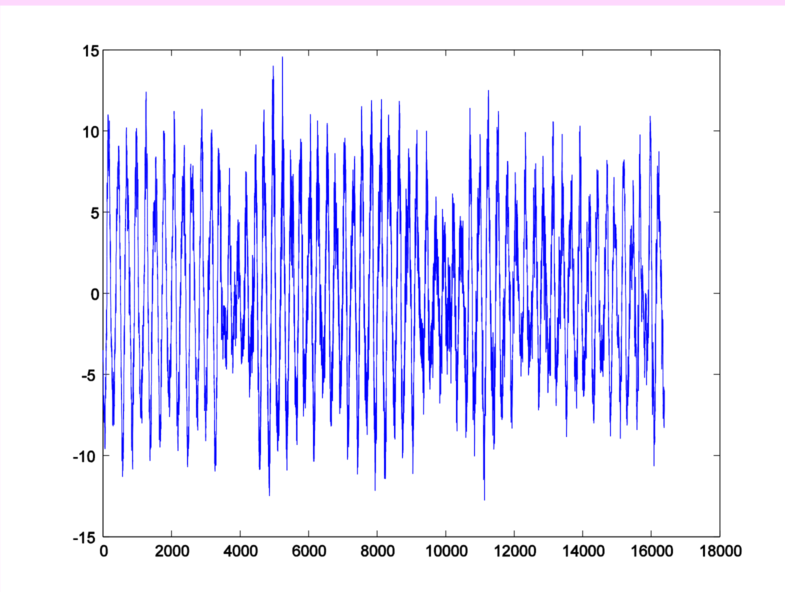
- $p(x_{k-1}|y_{1:k-1})$
  - 時刻t_1からt_{k-1}までの観測信号が与えられたもとでの時刻t_{k-1}における状態推定値の事後確率分布

  $\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}$：この分布の平均と共分散行列に相当
- $p(x_k|y_{1:k-1})$
  - 時刻t_{k-1}における上記事後分布を手がかりに推測される、時刻t_kにおける状態推定値の事前確率分布
- $p(x_k|y_{1:k}) = p(x_k|y_k, y_{1:k-1})$
  - 上記事前分布と時刻t_kにおける観測信号をもとに得られる、時刻t_kにおける状態推定値の事前確率分布

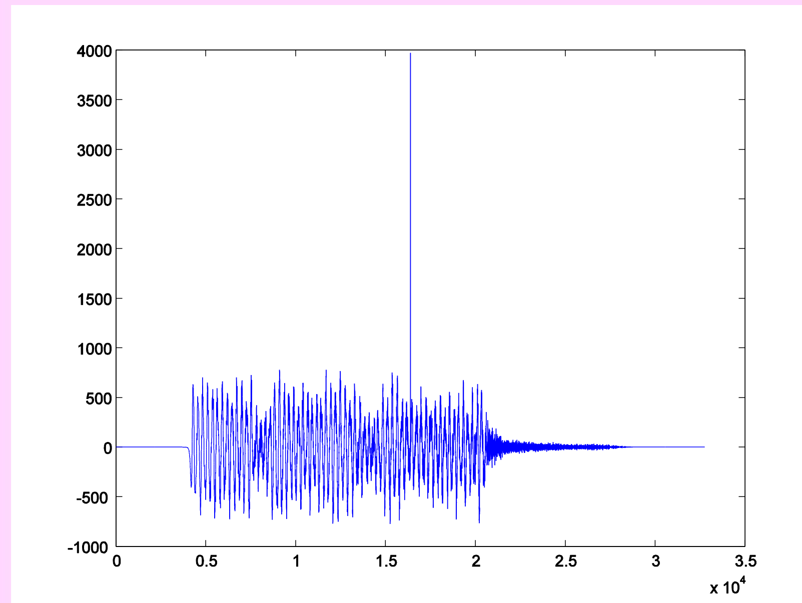


信号推定のまとめ:デモ

観測音(チャープ+雑音)



マッチトフィルタ結果



信号推定のまとめ：デモ

白色ノイズの場合

観測音

Wienerフィルタ

ベイズ推定
（事前分布モデルあり）

人ごみノイズの場合

観測音

Wienerフィルタ

ベイズ推定
（事前分布モデルあり）